Derdegraads vergelijking oplossen

- Gegeven is de derdegraads vergelijking $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$ met bekende a, b, c, d.
  Een waarde van x die voldoet aan de vergelijking, heet een nulpunt of wortel van de vergelijking.
  De vergelijking heeft 1, 2 of 3 verschillende nulpunten, die we als volgt kunnen berekenen.

- Bereken eerst p, q en de discriminant D.

  $$p = \left(\frac{b}{3 \cdot a}\right)^2 - \frac{c}{3 \cdot a} \qquad q = \left(\frac{b}{3 \cdot a}\right)^3 - \frac{b \cdot c}{6 \cdot a^2} + \frac{d}{2 \cdot a} \qquad D = q^2 - p^3$$

- Als $D > 0$, heeft de vergelijking slechts een nulpunt, namelijk x_1.

  $$x_1 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}} - \frac{b}{3 \cdot a}$$

- Als $D = 0$, heeft de vergelijking twee verschillende nulpunten, namelijk x_1 en x_2.

  $$x_1 = -2 \cdot \sqrt[3]{q} - \frac{b}{3 \cdot a} \qquad x_2 = \sqrt[3]{q} - \frac{b}{3 \cdot a}$$

- Als $D < 0$, heeft de vergelijking drie verschillende nulpunten, namelijk x_1, x_2 en x_3.

  Bereken eerst $\varphi = \frac{1}{3} \cdot \cos^{-1} \frac{q}{\sqrt{p^3}}$ $\qquad \cos^{-1} = \text{arccos} = \text{boogcosinus}$ in radiaal.

  $$x_1 = -2 \cdot \sqrt{p} \cdot \cos(\varphi) - \frac{b}{3 \cdot a}$$

  $$x_2 = -2 \cdot \sqrt{p} \cdot \cos\left(\varphi + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) - \frac{b}{3 \cdot a}$$

  $$x_3 = -2 \cdot \sqrt{p} \cdot \cos\left(\varphi + \frac{4 \cdot \pi}{3}\right) - \frac{b}{3 \cdot a}$$

- De coëfficiënten a, b, c en d moeten reële getallen zijn, geen complexe getallen.
  Met $D > 0$ heeft de vergelijking ook complexe (niet-reële) nulpunten. Die zijn hier niet vermeld.