

Gravitatie tussen twee bollen

Vraagbaak 98323 'Gravitatie tussen twee ballen', reactie van Jaap, 27.01.2026

Bol A heeft een massa m_A . Bol B heeft een massa m_B .

Op het tijdstip $t_1 = 0$ s zijn de bollen in rust volgens een inertiaalstelsel.

De afstand tussen de middelpunten van de bollen is dan r_1 .

Op de bollen werkt alleen de onderlinge gravitatiekracht.

Als we de bollen loslaten op $t_1 = 0$ s, beginnen ze naar elkaar toe te bewegen.

Op het tijdstip t_2 is de afstand tussen de middelpunten r_2 .

Bereken t_2 .

- Kinetische energie van de twee bollen

Aan het begin zijn de bollen in rust, hebben ze geen kinetische energie en is de totale impuls nul.

Volgens de wet van behoud van impuls geldt op elk tijdstip $m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B = 0 \rightarrow$

$$\text{op elk tijdstip geldt } \vec{v}_B = -\frac{m_A}{m_B} \cdot \vec{v}_A$$

Op een tijdstip t is de afstand tussen de middelpunten r en is de kinetische energie van de bollen

$$E_{k,A} + E_{k,B} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_B^2 = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot \frac{m_A^2}{m_B^2} \cdot v_A^2$$

$$E_{k,A} + E_{k,B} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) \cdot v_A^2 = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot \left(\frac{m_B + m_A}{m_B}\right) \cdot v_A^2$$

- Gravitatie-energie van de twee bollen

Aan het begin hebben de twee bollen samen een gravitatie-energie $E_{g,1} = -\frac{G \cdot m_A \cdot m_B}{r_1}$

Op het tijdstip t hebben de twee bollen samen een gravitatie-energie $E_g = -\frac{G \cdot m_A \cdot m_B}{r}$

- Energiebehoud

Volgens de wet van behoud van energie geldt $(E_k + E_g)_{t_1} = (E_k + E_g)_t$

$$0 - \frac{G \cdot m_A \cdot m_B}{r_1} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot \left(\frac{m_B + m_A}{m_B}\right) \cdot v_A^2 - \frac{G \cdot m_A \cdot m_B}{r}$$

$$\frac{G \cdot m_A \cdot m_B}{r} - \frac{G \cdot m_A \cdot m_B}{r_1} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot \left(\frac{m_B + m_A}{m_B}\right) \cdot v_A^2$$

$$2 \cdot G \cdot m_B \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{m_B + m_A}{m_B} \cdot v_A^2$$

$$v_A^2 = \frac{2 \cdot G \cdot m_B^2}{m_A + m_B} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_B^2}{m_A + m_B}} \cdot \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}}$$

- De relatieve snelheid van de ene bol ten opzichte van de andere op het tijdstip t is

$$v = v_A - v_B = v_A + \frac{m_A}{m_B} \cdot v_A = \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) \cdot v_A = \frac{m_B + m_A}{m_B} \cdot v_A \quad \text{nog afgezien van het teken}$$

$$v = \frac{m_B + m_A}{m_B} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_B^2}{m_A + m_B}} \cdot \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}} \quad \text{Maar } v \text{ is negatief, want } r \text{ neemt af en } \frac{dr}{dt} < 0, \text{ zodat}$$

$$v = \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2 \cdot G \cdot (m_A + m_B)} \cdot \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}} \quad \text{Dit is een differentiaalvergelijking voor } r(t).$$

- Oplossing van de differentiaalvergelijking

Scheiding van variabelen geeft $dt = \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot G \cdot (m_A + m_B)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1/r - 1/r_1}} dr$

Schrijf als integratievariabele τ in plaats van t en ρ in plaats van r .

$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau = \int_{r_1}^{r_2} \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot G \cdot (m_A + m_B)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1/\rho - 1/r_1}} d\rho$$

$$t_2 = \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot G \cdot (m_A + m_B)}} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1/\rho - 1/r_1}} d\rho \quad \text{Uitwerking van de integraal: zie hieronder.}$$

► $t_2 = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{2 \cdot G \cdot (m_A + m_B)}} \cdot \left(r_2 \cdot \sqrt{r_1/r_2 - 1} + r_1 \cdot \arctan \sqrt{r_1/r_2 - 1} \right) \quad \text{met } \arctan = \tan^{-1} \text{ in radialen}$

► Voorbeeld: $m_1 = m_2 = 4 \text{ kg}$ $r_1 = 2 \text{ m}$ $r_2 = 0,70 \text{ m}$ geeft $t_2 = 122\,447,753 \text{ s} = 34,013 \text{ h}$

Uitwerking van de integraal $\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1/\rho - 1/r_1}} d\rho = \sqrt{r_1} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{r_1/\rho - 1}} d\rho = \dots$

Kies $u = \sqrt{r_1/\rho - 1} \rightarrow u^2 = \frac{r_1}{\rho} - 1 \rightarrow \frac{r_1}{\rho} = u^2 + 1 \rightarrow \frac{r_1}{\rho^2} = \frac{(u^2 + 1)^2}{r_1}$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{r_1/\rho - 1}} \cdot \left(-\frac{r_1}{\rho^2} \right) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{r_1/\rho - 1}} \cdot \frac{-(u^2 + 1)^2}{r_1}$$

$$d\rho = -2 \cdot r_1 \cdot \sqrt{r_1/\rho - 1} \cdot \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du$$

$$\dots = \sqrt{r_1} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{r_1/\rho - 1}} \cdot (-2 \cdot r_1) \cdot \sqrt{r_1/\rho - 1} \cdot \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du = -2 \cdot r_1 \cdot \sqrt{r_1} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du = \dots$$

Kies $u = \tan \varphi \rightarrow \frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi$

$$u^2 + 1 = \tan^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \rightarrow \frac{1}{u^2 + 1} = \cos^2 \varphi$$

$$\dots = -2 \cdot r_1 \cdot \sqrt{r_1} \cdot \int (\cos^2 \varphi)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = -2 \cdot r_1 \cdot \sqrt{r_1} \cdot \int \cos^2 \varphi d\varphi = \dots$$

$$\cos(2 \cdot \varphi) = 2 \cdot \cos^2 \varphi - 1 \rightarrow \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \cdot (\cos(2 \cdot \varphi) + 1)$$

$$\dots = -2 \cdot r_1 \cdot \sqrt{r_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\int \cos(2 \cdot \varphi) d\varphi + \int d\varphi \right) = -r_1 \cdot \sqrt{r_1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) + \varphi \right]_{t_1}^{t_2} = \dots$$

Op het tijdstip t_1 is $\rho = r_1 \rightarrow u = \sqrt{r_1/\rho - 1} = 0 \rightarrow \tan \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$

Op het tijdstip t_2 is $\rho = r_2 \rightarrow u = \sqrt{r_1/\rho - 1} = \sqrt{r_1/r_2 - 1} \rightarrow \tan \varphi = \sqrt{r_1/r_2 - 1}$

$$\sin(2 \cdot \varphi) = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 2 \cdot (\tan \varphi \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \varphi = 2 \cdot \tan \varphi \cdot \cos^2 \varphi = 2 \cdot \tan \varphi \cdot \frac{1}{\tan^2 \varphi + 1}$$

$$\sin(2 \cdot \varphi) = 2 \cdot \sqrt{r_1/r_2 - 1} \cdot \frac{1}{(r_1/r_2 - 1) + 1} = 2 \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot \sqrt{r_1/r_2 - 1}$$

$$\dots = -r_1 \cdot \sqrt{r_1} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} \cdot \sqrt{r_1/r_2 - 1} + \arctan \sqrt{r_1/r_2 - 1} - 0 - 0 \right)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1/\rho - 1/r_1}} d\rho = -\sqrt{r_1} \cdot \left(r_2 \cdot \sqrt{r_1/r_2 - 1} + r_1 \cdot \arctan \sqrt{r_1/r_2 - 1} \right)$$