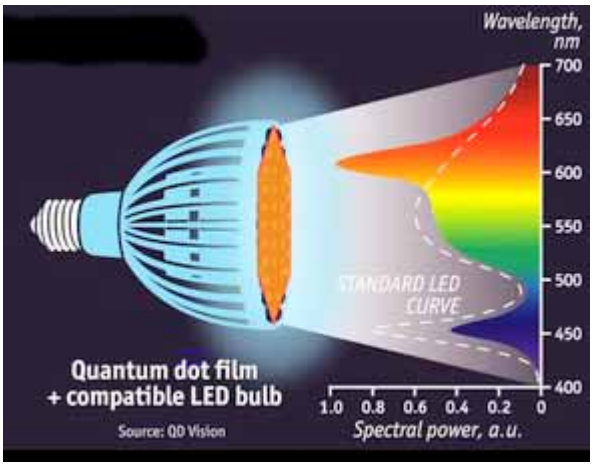
Quantumwereld





6 VWO

NiNa
NIEUWE NATUURKUNDE

QUANTUMWERELD

De hele wereld is een quantumwereld. Bij dingen die veel groter zijn dan een molecuul, dus bij alles wat je met het blote oog ziet, is dat verborgen. Macroscopische objecten gedragen zich volgens de mechanica van Newton. Daaraan ben je gewend. Als je de quantumregels waaraan atomen, elektronen en fotonen voldoen voor het eerst ziet, komen ze vreemd over.

De bedoeling is dat je in deze module de quantumregels niet alleen leert kennen en leert toepassen, maar dat je ook begrijpt waarom die regels wel moeten kloppen. De bewijzen komen uit de natuur, uit het gedrag van deeltjes en van licht. Je begrijpt het pas echt als je ook begrijpt hoe het komt dat de regels niet lijken te gelden voor grote voorwerpen. Klein en groot, micro en macro, quantum of niet, om die tegenstellingen gaat het in deze module.

Bij het ontwikkelen van deze module zijn elementen uit het Project Moderne Natuurkunde gebruikt; zie www.cdbeta.uu.nl/subw/mn/.

Colofon

Project	Nieuwe Natuurkunde
Auteur	Hans van Bemmel
Vormgeving	Loran de Vries
NiNa Redactie	Harrie Eijkelhof, Koos Kortland, Guus Mulder, Maarten Pieters, Chris van Weert, Fleur Zeldenrust
Versie	1-9-2010

Copyright

©Stichting natuurkunde.nl, Enschede 1-9-2010

Alle rechten voorbehouden. Geen enkele openbaarmaking of verveelvoudiging is toegestaan, zoals verspreiden, verzenden, opnemen in een ander werk, netwerk of website, tijdelijke of permanente reproductie, vertalen of bewerken of anderszins al of niet commercieel hergebruik.

Als uitzondering hierop is openbaarmaking of verveelvoudiging toegestaan

- voor eigen gebruik of voor gebruik in het eigen onderwijs aan leerlingen of studenten,
- als onderdeel van een ander werk, netwerk of website, tijdelijke of permanente reproductie, vertaald en/of bewerkt, voor al of niet commercieel hergebruik, mits hierbij voldaan is aan de volgende condities:
- schriftelijke toestemming is verkregen van de Stichting natuurkunde.nl, voor dit materiaal vertegenwoordigd door de Universiteit van Amsterdam (via info@nieuwenatuurkunde.nl),
- bij hergebruik of verspreiding dient de gebruiker de bron correct te vermelden, en de licentievoorwaarden van dit werk kenbaar te maken.

Voor zover wij gebruik maken van extern materiaal proberen wij toestemming te verkrijgen van eventuele rechthebbenden. Mocht u desondanks van mening zijn dat u rechten kunt laten gelden op materiaal dat in deze reeks is gebruikt dan verzoeken wij u contact met ons op te nemen: info@nieuwenatuurkunde.nl

De module is met zorg samengesteld en getest. De Stichting natuurkunde.nl, resp. Commissie Vernieuwing Natuurkundeonderwijs havo/vwo, Universiteit van Amsterdam en auteurs aanvaarden geen enkele aansprakelijkheid voor onjuistheden en/of onvolledigheden in de module, noch enige aansprakelijkheid voor enige schade, voortkomend uit het gebruik van deze module.

INHOUDSOPGAVE

1 Een vreemde wereld? 6

2 Deeltjes, golfjes, elektronen, fotonen 8

2.1 Wat we dachten te weten in 1900 8

2.2 Elektronen, niet zomaar geladen balletjes 11

2.3 Alles of niets met licht 14

3 Het tunneleffect en onbepaaldheid 23

3.1 Twee vreemde verschijnselen 23

3.2 Het quantum tunneleffect 25

3.3 EXTRA Hoe groot is de kans op tunneling? 27

3.4 Onbepaaldheidsrelatie 28

4 Quantisatie en spectra 33

4.1 Quantumdeeltje in een doosje 34

4.2 EXTRA Beter model voor een waterstofatoom 38

4.3 Systemen met meerdere elektronen 41

5 Kleine quanta in een grote wereld 52

5.1 Macroscopisch trillen 53

5.2 Molecuul en antenne 53

5.3 EXTRA Macroscopisch draaien rond een centrum 54

6 Verder denken 59

6.1 Onvoorspelbare uitkomsten? 59

6.2 Quantumcryptografie en quantumcomputers 60

6.3 Pauli en verder 60

6.4 Wiskundige volgordes 61

6.5 Zonnecellen 61

6.6 De Schrödingervergelijking 61

Voorbeeldtoetsopgave 63

GLOBALE OPBOUW VAN EEN PARAGRAAF

In het lesmateriaal is een aantal stijlen gebruikt. De *belangrijkste leerstof* is weergeven in *blauwe* tekstvakken. De betekenis van de andere kleuren en stijlen is hieronder aangegeven.

Pas op! Veel leerlingen voor jou hebben moeite gehad met onderwerpen die in **rode** tekstvakken nog eens extra aandacht krijgen. Zodat jij niet meer in deze **valkuilen** zult vallen!


1 Een vreemde wereld?

Valkuil

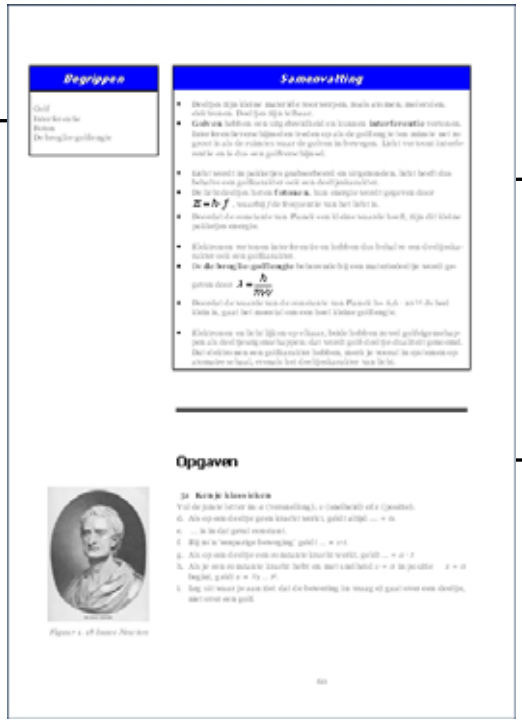
Extra

Lopende golf

In de tekst komen **oriëntatie-, reflectie- en onderzoeksopdrachten voor.** Deze opdrachten staan in de **paarse** tekstvakken.

In **groene** tekstvakken vind je **extra** uitleg die je niet per se nodig hebt om de opgaven te kunnen maken, maar wel een interessante aanvulling op de tekst is.

Belangrijke nieuwe **vergelijkingen** uit de natuurkunde zijn aangegeven in **blauwe** tekstvakken. Deze heb je nodig om rekenwerk mee te kunnen verrichten.


Begrippen

Samenvatting

Opgaven

In het **blauwe** tekstvak "**Begrippen**" staan belangrijkste termen uit de tekst

In het **blauwe** tekstvak **"Samenvatting"** staat de minimale kennis die je paraat moet hebben.

Opgaven staan bij elkaar aan het einde van een hoofdstuk. De opgaven zijn gegroepeerd per paragraaf.

INLEIDING OP DE MODULE

De quantumwereld is de wereld van licht en materie op de kleinste schaal. Daar spelen fundamentele vragen, zoals de vraag of licht zich gedraagt als een stroom golfjes, of als een stroom deeltjes. Het antwoord blijkt te zijn dat het allebei waar is. Ook elektronen blijken zowel deeltjes als golfjes te zijn.

In deze module beginnen we bij elk fundamenteel probleem met een praktische toepassing: De digitale camera is de inspiratie voor het bestuderen van fotonen, radioactiviteit voor het bestuderen van de onbepaaldheidsrelatie, lasers en stroomdraden voor het bestuderen van quantisatie. Er is een apart hoofdstuk over de vraag wanneer quanta een rol spelen en wanneer niet.

Wij kiezen er voor de theorie niet zo wiskundig te beschrijven als veel boeken doen. Dat is voor een deel omdat op school de wiskundige gereedschappen niet behandeld zijn, maar vooral omdat de wiskunde niet de essentie is.

Na de praktische, niet zo wiskundige basisstof, is er aan het eind verdiepingsstof in wiskundige en geheimzinnige richtingen.

Voorkennis

- De tweede wet van Newton: $F = m \cdot a$.
- Het begrip impuls: $p = m \cdot v$.
- De kinetische energie is $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.
- Staande golven in muziekinstrumenten.
- Een stof kan worden herkend aan de frequenties die voorkomen in zijn lijnenspectrum.
- Hoofdstuk 2.1 over deeltje-golf dualiteit van de module 'Elektromagnetische straling en materie'; dit wordt in hoofdstuk 2 van deze module voor een deel herhaald.

1 Een vreemde wereld?

Hoofdstukvraag	Over welke verschijnselen gaat deze module?



De quantumwereld heeft een geheimzinnige kant, maar ook een alledaagse. Het is de wereld van kansen en onzekerheden, van processen die onmogelijk lijken maar het niet zijn, een microscopische wereld waarin de mechanica van Newton niet werkt. Maar het is ook de wereld van het lasertje in je DVD-speler, van de LED en de zonnecel, de nachtzichtkijker van de militair en de elektronenmicroscoop van de medicus.

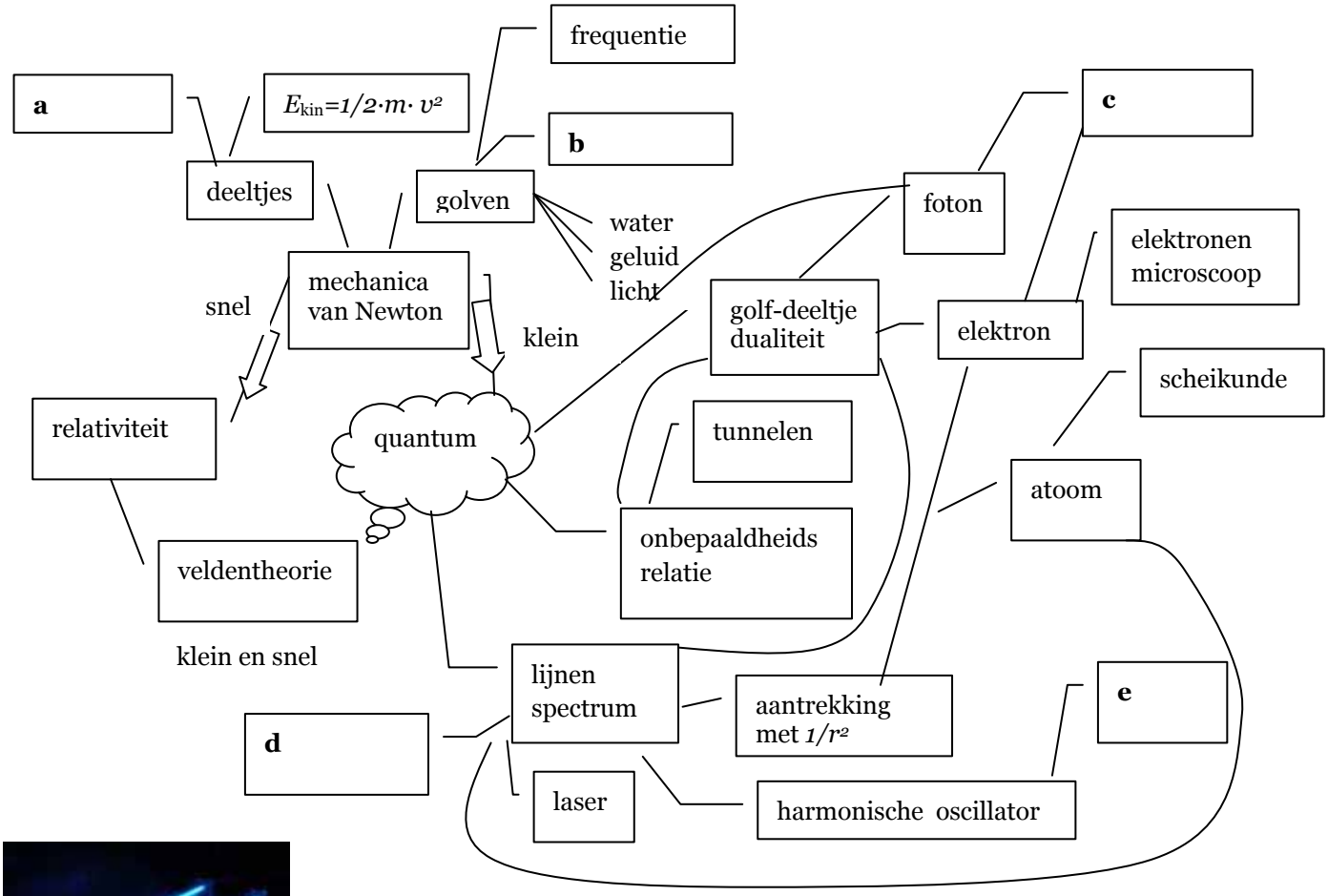






Figuur 1.1 Quantumtoepassingen en quantumtheorie

In deze module kiezen we ervoor steeds een praktische toepassing als inspiratiebron te nemen. Door te kijken naar hoe de natuur zich gedraagt en door te redeneren, kun je begrijpen wat de quantumregels zijn. Die regels zeggen tegelijkertijd iets over de fundamentele vraag hoe licht en materie zich op de allerkleinste schaal gedragen en over praktische zaken zoals microscopen en chips in computers.





Figuur 1.2 Neonlampen



Figuur 1.3 Tunnel

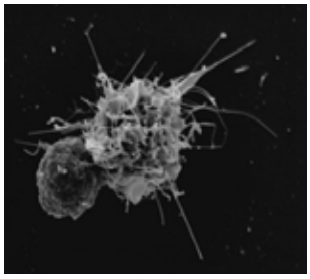
In het begrippennetwerk zie je woorden die met de quantumwereld te maken hebben, en hoe ze met elkaar samenhangen. Daarover gaan de volgende oriëntatieopdrachten:

Oriëntatieopdracht

a. Schrijf op wat de volgende woorden buiten de natuurkunde betekenen: kwantum (denk aan kwantumkorting), tunnel, spectrum, dualiteit, relatie.
b. Kijk in de inhoudsopgave en bedenk welk hoofdstuk bij welke vakjes hoort. Schijf de nummers van de hoofdstukken 2 tot en met 5 op, met steeds de juiste begrippen erachter.
c. Bij welk leeg vakje a tot en met e horen de volgende eigenschappen en toepassingen: atomen trillen in molecuul; digitale camera; golflengte; neonlamp; $x(t)$, $v(t)$ en $a(t)$?
d. Bedenk drie vragen waarvan je denkt dat ze in deze module zullen worden beantwoord.

2 Deeltjes, golfjes, elektronen, fotonen

Hoofdstukvraag	Wat zijn de overeenkomsten en de verschillen tussen een bundel elektronen en een lichtbundel?



Figuur 1.4 Gemaakt met elektronenmicroscoop



Figuur 1.5 Gemaakt met nachtzichtkijker



Figuur 1.6 De baan van een macroscopisch deeltje

Het lijken twee heel saaie proeven, waar dit hoofdstuk over gaat. Schiet elektronen op een plaatje met twee spleten en kijk wat je achter het plaatje ziet. Schijn licht op een stukje metaal en kijk of er elektronen uit komen. Maar door dit soort proeven veranderde begin twintigste eeuw het hele idee van wat elektronen zijn en van wat licht is. Bovendien kun je zonder de eerste proef niet begrijpen hoe een medicus met een elektronenmicroscoop afbeeldingen kan maken met meer details dan met een gewone lichtmicroscoop. En zonder de tweede proef kun je niet begrijpen hoe de nachtzichtkijker van de militair andere straling kan registreren dan het oog of een gewone digitale camera.

Paragraaf 1 gaat over wat de mensheid vóór 1900 dacht te weten over golven en deeltjes. In paragraaf 2 komt een onverwachte eigenschap van elektronen aan de orde. Daarna volgt in paragraaf 3 een onverwachte eigenschap van licht. Net als je denkt dat je de twee conclusies van dit hoofdstuk begrijpt, blijkt het er maar één te zijn. In de opgaven pas je alles toe op bijzondere microscopen, je oog, camera's, luchtmoleculen, en elektronen in een atoom.

2.1 Wat we dachten te weten in 1900

Deeltjes

Tussen 1600 en 1700 is de mensheid dankzij Galileo Galileï en Isaac Newton gaan begrijpen waardoor de beweging van een voorwerp wordt bepaald. Een belangrijke eigenschap van een kogel of van een karretje is de massa m. De positie noemen we x. Hoe snel de positie verandert in de tijd noemen we de snelheid v. De versnelling a geeft aan hoe snel de snelheid verandert. Al deze eigenschappen van de baan kun je op elk moment bepalen. Het belangrijkste verband in de klassieke mechanica is de tweede wet van Newton, waarmee je kunt berekenen hoe groot de versnelling is als je op een voorwerp met massa m een kracht F uitoefent: $a = F/m$. Als je de versnelling op elk moment weet, kun je met $\Delta v = a \cdot \Delta t$ en $\Delta x = v \cdot \Delta t$ de snelheid en de positie ook bepalen. De baan van het deeltje ligt daarmee vast, als functie van de tijd. Je weet $x(t)$.

Als je een karretje aanduwt, of als je een steen wegschiet met een katapult, geef je bewegingsenergie mee. De hoeveelheid energie die het voorwerp heeft, is gelijk aan $E_{kin} = 1/2 \cdot m \cdot v^2$. Ook de bewegende moleculen in de lucht kunnen op deze manier worden beschreven: als kleine voorwerpen met massa m, waarvan de banen in principe te bepalen zijn, en die een kinetische energie hebben. Dergelijke kleine materiële voorwerpen (atoom, molecuul, elektron,…) noemen we **deeltjes**.

Laplace

Deze ideeën achter de mechanica van Newton hadden invloed op hoe je over het hele heelal en het leven kon denken.

Pierre-Simon Laplace, een groot wis- en natuurkundige uit de tijd van Napoleon, formuleerde het zo: 'als een geest op zeker moment alle posities en snelheden zou kennen en bovendien die gegevens aan analyse zou kunnen onderwerpen, zou hij toekomst en verleden op slag voor ogen hebben en zou er geen onzekerheid voor hem bestaan.'

Natuurlijk was dit in de praktijk al onmogelijk, maar we zullen zien dat de quantumregels aantonen dat dit ook *principieel* onmogelijk is.

Deeltjes kun je tellen, ze komen voor in gehele aantallen. Je kunt van elk deeltje afzonderlijk de positie bepalen en als je de kracht weet ook de baan. In de praktijk weet je niet de baan van elk afzonderlijk molecuul, maar dat is alleen maar zo omdat het teveel rekenwerk is.

Golven

Als grote of kleine voorwerpen een baan van de ene plaats naar de andere afleggen, nemen ze energie mee. Er is een heel andere manier om energie van de ene plaats naar de andere te transporteren. Dat is via golven. De signalen die telefoons uitwisselen zijn hier een voorbeeld van.

Als je een touw een zwiep geeft, is het niet zo dat een stukje touw zich naar het andere uiteinde verplaatst. Als er een cirkelgolf in het water ontstaat doordat er een steen in valt, verplaatst zich geen water vanuit het middelpunt van de cirkel naar buiten. Dan zou er uiteindelijk een kuiltje overblijven en dat is niet zo. Als je tegen iemand praat, stroomt de lucht niet met 340 m/s naar die ander toe. In alle gevallen is het een verstoring die zich verplaatst, niet het materiaal zelf. Elk stukje touw, stukje wateroppervlak, beetje lucht, voert een trilling uit, rond zijn eigen vaste positie. Het is het patroon dat zich verplaatst. Dat patroon noemen we een **lopende golf**.

Lopende golf

De verplaatsing van het patroon kun je beschrijven met het verband

$$v = \lambda \cdot f$$

Symbolen: f is de frequentie in Hertz (Hz), het aantal trillingen per seconde, λ is de golflengte in meter (m) en v is de snelheid in meter per seconde (ms^{-1}).

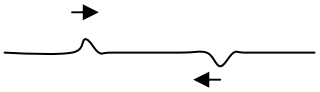


Figuur 1. 7 Tweedimensionale golven

De **snelheid van een lopende golf** is gelijk aan de lengte van één golf, maal het aantal golven dat per seconde passeert. Je ziet dat een golf altijd een uitgebreidheid heeft, hij bevindt zich niet in één punt, maar wordt gekenmerkt door een golflengte λ.

De maximale uitwijking van een golf heet de **amplitude**. Hoe meer energie in de golf zit, hoe groter de amplitude. Een krachtige zwiep aan een touw, een grote steen in het water, en een harde schreeuw leveren golven op met grote amplitudes.

Golven kunnen interfereren, deeltjes niet



Figuur 1. 8 Op het moment dat de golfjes elkaar passeren, is er geen uitwijking

Als je achter elkaar honderd golfballen wegslaat op een oefenveld, dan liggen er daarna honderd golfballen in het veld. Niet minder, niet meer. Maar als je twee golfjes een koord instuurt, één van links en één van rechts, en je kijkt even later, dan kan het zo zijn dat je op dat moment niets ziet, geen enkele uitwijking van het koord. De golfjes werken elkaar dan precies tegen, de ene golf zegt dat er een uitwijking omhoog moet zijn, de andere zegt dat er een uitwijking omlaag moet zijn. Het resultaat is geen enkele uitwijking op dat moment en op die positie. Dit heet **destructieve interferentie**. Dat deze mogelijkheid bestaat, is een kenmerk van golven. Als je zorgt dat de twee golven in het koord juist samenwerken, krijg je een extra hoge golf. Dat heet **constructieve interferentie**. Ook watergolven en geluidsgolven kunnen destructief of constructief interfereren. Deeltjes niet.

Wanneer merk je iets van interferentie?

Of golven elkaar versterken of elkaar uitdoven, is een kwestie van de positie waar je kijkt. Neem bijvoorbeeld twee luidsprekers die allebei één toon uitzenden. Ze doen dat in fase, dat wil zeggen dat de toppen, de nulpunten en de dalen van beide golven gelijktijdig ontstaan. Als je dan op een punt precies in het midden gaat luisteren, hoor je een hard geluid. Dat komt doorat de golven die bij de bronnen in fase waren en allebei dezelfde afstand hebben afgelegd, in dat punt in het midden ook in fase met elkaar aankomen. Ze versterken elkaar op die plek.



Figuur 1.9 Golven in fase

Als je nu een kwart golflengte opzij gaat, dan zijn op jouw nieuwe positie de golven een halve golf ten opzichte van elkaar verschoven. De ene hoefde een kwart golflengte minder af te leggen van zijn bron tot het punt waar je staat, de ander een kwart golflengte meer. Op het moment dat de ene golf een top heeft, heeft de ander een dal. De golven doven elkaar uit.



Figuur 1.10 Golven in tegenfase

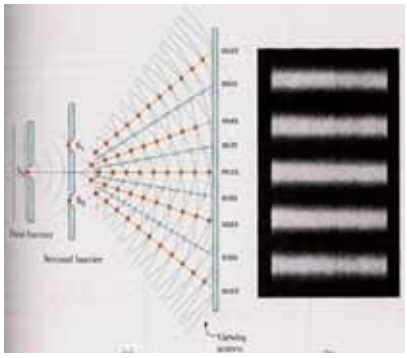
Zo wisselen punten in de ruimte waar versterking is en punten waar verzwakking is elkaar af. Hoe kleiner de golflengte is, hoe sneller de afwisseling. Als je een frequentie van 20 kHz hebt, is de golflengte gelijk aan $\lambda=v/f$, met v de geluidsnelheid van 340 m/s. Dus de uitkomst is 1,7 cm. Een kwart golflengte is dus een paar millimeter. De maxima en de minima liggen een paar millimeter uit elkaar en dat kan je oor, dat veel groter is, niet onderscheiden. Je trommelvlies omvat altijd meerdere maxima en minima, je oor als geheel nog veel meer. Waar je je oor ook houdt, het geluid klinkt even hard. Bij een toon van 200 Hz is de frequentie honderd keer zo klein en de golflengte honderd keer zo groot. De afstand tussen een minimum en een maximum is dan zo'n 4 decimeter. Als je je hoofd beweegt, hoor je nu wel een afwisseling van hard geluid op sommige plaatsen en zacht geluid op andere plaatsen.

Je merkt dus alleen iets van de afwisseling tussen hard en zacht, de afwisseling van posities met constructieve interferentie en posities met destructieve interferentie, als de golflengte vrij groot is in verhouding tot je oor.

Dit principe zullen we vaker terugzien: je merkt iets van golfverschijnselen als de golflengte relatief groot is:

$$\lambda > L$$

Relatief groot, dat betekent groot ten opzichte van de afmeting L van iets anders. Een grote getalwaarde voor de golflengte op zich betekent niets. Dat kun je zien aan het volgende voorbeeld: een afstand van 60 000 cm is een groot aantal centimeters, maar dit is gelijk aan 0,60 km, een klein aantal kilometers. Relevant voor de vraag of iets een grote afstand is, is of het een grote waarde is vergeleken met bijvoorbeeld de afstand die je in een uur kunt fietsen. Relevant voor de vraag of de golflengte van geluid groot is, is de vraag hoe die golflengte zich verhoudt tot de grootte van je oorschelp.



Figuur 1.11 De proef van Thomas Young

Licht bestaat uit golfjes

In de loop van de geschiedenis is een punt van discussie geweest of licht bestaat uit golven of uit deeltjes. Isaac Newton dacht dat het om deeltjes ging, Christiaan Huygens dacht dat het om golfjes ging. In ieder geval zijn de golfjes of de deeltjes te klein om met het blote oog of met een microscoop te bekijken.

In 1812 gaf een proef van Thomas Young voorlopig de doorslag. Hij zond licht op een ondoorzichtig plaatje met twee spleten er in. Een stroom heel kleine deeltjes zou zorgen dat je op een scherm daar achter een afbeelding van de twee spleten zou zien, dus met maxima op twee plaatsen. Tussen de

maxima zou één minimum zichtbaar zijn, de schaduw van het stuk tussen de spleten.



Figuur 1.12 Geen interferentie

Het bleek dat er een patroon ontstond met veel meer maxima en minima. Dit kon helemaal niet verklaard worden met een model van stromen kleine deeltjes. Met golfjes kan dat wel: in de maxima is het verschil tussen de afstand tot de ene spleet en de afstand tot de andere spleet gelijk aan 0, λ, 2λ, 3λ, … zodat op al die plekken de golfjes die uit de twee bronnen afkomstig zijn elkaar versterken. Daartussen zijn de plaatsen met afstandsverschil ½ λ, 3/2 λ, 5/2 λ, … zodat de golfjes uit de twee bronnen elkaar op die posities verzwakken.

Ook hier merk je alleen iets als de golflengte groter is dan de schaal waarop je de lichtgolven bestudeert, in dit geval is dat de afstand tussen de spleten. Als je licht door ruiten van een paar vierkante meter stuurt, krijg je geen interferentieverschijnselen en merk je er niets van dat licht uit kleine golfjes bestaat.

2.2 Elektronen, niet zomaar geladen balletjes

Golf-deeltje-dualiteit

Elektronen zijn rond 1890 ontdekt. Het leek heel duidelijk dat het deeltjes zijn, geen golven. Waarschijnlijk stel jij je ook voor dat in een stroomdraad heel kleine geladen balletjes de lading en de energie transporteren. En voor veel toepassingen klopt dat inderdaad, en kun je elektronen als geladen deeltjes beschouwen, die banen volgen, banen die aan de wetten van Newton voldoen.

De grote verrassing kwam toen Davisson en Germer rond 1920 elektronen op een kristal schenen. Er ontstond een interferentiepatroon van maxima en minima, dat alleen verklaard kon worden door er van uit te gaan dat elektronen zich als golfjes gedragen, als het gaat om de vraag waar ze terechtkomen. Gewone kleine balletjes kunnen elkaar niet versterken of verzwakken.

Pas veel later is het twee-spletenexperiment dat Young met licht deed nagedaan met elektronen. Het patroon dat achter de twee spleten ontstaat, is net zo'n interferentiepatroon als wat je met licht krijgt. Net als de proef van Davisson en Germer met kristallen, toont ook dit experiment aan dat elektronen zich als golfjes gedragen wat betreft het bepalen van de plaats waar ze terechtkomen. Om zeker te weten dat de maxima en de minima niet veroorzaakt worden door afstotende krachten tussen de elektronen, is ervoor gezorgd dat er maar één elektron tegelijk op de spleten af gaat. In een filmpje zie je dan hoe het interferentiepatroon langzaam opbouwt. De elektronen arriveren per stuk bij de fotografische plaat en ze worden ook per stuk geabsorbeerd. Maar het patroon dat ze vormen is een interferentiepatroon met veel maxima en minima.

De situatie is dus een beetje vreemd. Elektronen hebben een golfkarakter, dat blijkt uit de interferentiepatronen die ze kunnen vormen. Ze hebben toch ook iets van een deeltje, want er worden door een fotografische plaat altijd hele elektronen tegelijk geabsorbeerd, geen golfjes met alle mogelijke amplitudes. Dit wordt wel de **golf-deeltje-dualiteit** genoemd. Een elektron is een beetje golf, een beetje deeltje. Misschien zou je beter kunnen zeggen: het is geen deeltje, het is geen golf, het is iets heel nieuws: een quantumdeeltje.



Figuur 1. 13 Louis-Victor de Broglie



Figuur 1.14 Max Planck

De de broglie-golflengte

Het blijkt dat je de interferentiepatronen kwantitatief kunt verklaren, dat wil zeggen dat je de precieze posities van de maxima en minima kunt uitrekenen, als je zegt dat de golflengte van de elektronen gelijk is aan de de broglie-golflengte, vernoemd naar de Fransman Louis-Victor de Broglie.

De broglie-golflengte

Het verband tussen de **de broglie-golflengte** en de impuls van een deeltje wordt gegeven door:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

Symbolen: λ is de de broglie-golflengte in meter (m), p is de impuls in kilogram meter per seconde (kg ms^{-1}), v is de snelheid in meter per seconde (ms^{-1}) en m is de massa in kilogram (kg). Het symbool h staat voor de constante van Planck, genoemd naar de Duitse natuurkundige Max Planck. De waarde van deze constante is 6,6·10^{-34} Js,

Elk bewegend object heeft een de broglie-golflengte. Meestal is de waarde heel klein, als je hem in meters uitdrukt. Elektronen hebben een relatief grote de broglie-golflengte doordat hun massa slechts 9,1·10^{-31} kg is. Je kunt ervoor zorgen dat elektronen een de broglie-golflengte hebben van enkele nanometers.

Op deze schaal vertonen elektronen interferentie. Daar merk je dus alleen iets van als deze golflengte groter is dan (of vergelijkbaar met) de afmetingen van de ruimte waar de elektronen mee te maken hebben. Als je elektronen op een kristal afstuurt is dat het geval, daar zitten de atomen op afstanden van nanometers van elkaar af. Dat is vergelijkbaar met de de broglie-golflengte van de elektronen, daardoor zagen Davisson en Germer interferentieverschijnselen.

Als je elektronen door een stroomdraad van een paar millimeter dik laat gaan, is de beschikbare ruimte veel groter dan de de broglie-golflengte. In dat laatste geval merk je niets van interferentie.

Je kunt niet zeggen dat een elektron op één punt is. Zijn bijbehorende golf is uitgespreid over een gebiedje ter grootte van de de broglie-golflengte. Anders zou je geen interferentie krijgen. Als een elektron een grote ruimte tot zijn beschikking heeft, is er niets van te merken dat het niet op één punt is. Als een elektron door een televisietoestel vliegt, dan maakt het niet uit dat zijn positie niet precies bekend is, maar alleen op enkele nanometers na. Die nanometers maken niet uit op de schaal van het toestel. Het elektron komt daardoor echt niet op een andere pixel op het scherm terecht. De klassieke baan is in dit geval best een goede beschrijving.

Als het elektron echter binnen een atoom beweegt, dan is dat niet helemaal vastliggen van de positie wél belangrijk, want dat hele atoom is niet groter dan een nanometer. Je kunt het elektron dan niet beschouwen als een deeltje dat een baan volgt, dat beeld is dan echt verkeerd. Het is een golfje dat bin-

nen het atoom bestaat. De vorm van de golf bepaalt op welke posities de kans groot is het elektron aan te treffen.

Zwaardere deeltjes

Andere deeltjes dan elektronen hebben een grotere massa. Dat zorgt ervoor dat hun de broglie-golflengte heel klein is. Pas als ze te maken hebben met héél kleine ruimtes, merk je er iets van dat ze ook een golfkarakter hebben. Pas op heel kleine schaal merk je dat het geen puntdeeltjes zijn, dat hun positie niet vastligt maar alleen bekend is op de de broglie-golflengte na, en pas op die heel kleine schaal zijn er interferentieverschijnselen. Een proton in een kern heeft wel veel meer massa dan een elektron, maar hij zit in een heel kleine ruimte, dus je hebt dan wel degelijk te maken met de golfeigenschappen.

Reken- en redeneervoorbeeld

De afmeting van de atoomkern van het element uranium is van de orde van grootte 10^{-14} m. We bekijken de vraag of je de bewegingen van de protonen en neutronen binnen de kern zou kunnen begrijpen *zonder* rekening te houden met quantumeffecten. Dat zou zo zijn als de meer dan tweehonderd kerndeeltjes als botsende balletjes door de kern zouden bewegen. De snelheid van de protonen en neutronen zou dan door de temperatuur worden bepaald.

De snelheid van een deeltje met massa $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg bij een temperatuur rond 300 K beschouwen we als gegeven, die is ongeveer $3 \cdot 10^{3}$ m/s. Hiermee berekenen we de de broglie-golflengte:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{3}} = 1{,}3 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

Dit is veel groter dan de afmeting van de kern. De mate van onbepaaldheid van de positie zou veel groter zijn dan de ruimte waarin de deeltjes zich bevinden. Het is dus *niet* gerechtvaardigd de deeltjes te beschouwen als klassieke deeltjes die binnen de kern banen volgen. Het is nodig protonen en neutronen te beschouwen als quantumdeeltjes die zijn opgesloten in de kern. Het is dus nodig rekening te houden met de golfeigenschappen.

Bij een macroscopisch object merk je helemaal niets van de golfeigenschappen. Als een persoon van 60 kg met een snelheid van 10 m/s sprint, is zijn de broglie-golflengte ongeveer 10^{-36} m. Dat is zelfs nog veel kleiner dan een atoomkern, een eventuele afwisseling van maxima en minima op die schaal kun je niet merken. De persoon zal nooit door ruimtes van die afmetingen kunnen bewegen.

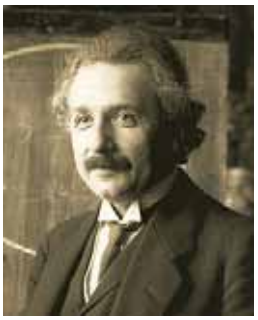
Elektronenmicroscoop

Je hebt het golfkarakter van deeltjes nodig om de elektronenmicroscoop te begrijpen. Met elk soort microscoop kun je geen kleinere details zien dan de golflengte van het 'ding' dat je afstuurt op wat je wilt bekijken. Bij zichtbaar licht is die golflengte van het licht dat je op je object afstuurt enkele honderden nanometers groot. Kleinere details dan dat kun je dus niet zien. De de broglie-golflengte van elektronen die in een elektronenmicroscoop op het object worden afgestuurd kan veel kleiner zijn, zodat je dan wel kleinere details kunt zien.

Voor het maken van een afbeelding moet de de broglie-golflengte klein zijn, dan heb je geen last van interferentie. Als je het juist interessant vindt om interferentieverschijnselen te zien, moet je zorgen voor een relatief grote de broglie-golflengte.



Figuur 1. 15 Gemaakt op Mars



Figuur 1. 16 Albert Einstein

2.3 Alles of niets met licht

We hebben gezien dat elektronen niet alleen deeltjes zijn, maar ook een golfkarakter hebben. Nu gaan we verder kijken naar licht. De proef van Young, met de twee spleten, heeft aangetoond dat licht uit golven bestaat. We zullen zien dat licht ook een deeltjeskarakter heeft. Om dat te begrijpen kijken we naar wat er gebeurt in camera's.

Vroeger werden foto's gemaakt doordat licht op fotopapier terechtkwam. Dat moest vervolgens ontwikkeld worden. Tegenwoordig zorgt het licht voor een elektrisch signaal in een digitale camera. De foto hiernaast is op Mars genomen. Het was natuurlijk wel handig dat er geen fotopapier naar de aarde gebracht hoefde te worden, maar dat het elektronische signaal kon worden doorgestraald. Ook jouw foto's kun je tegenwoordig langs elektronische weg inladen in je computer.

Fotonen

Achter deze techniek zit een ontdekking uit het einde van de 19e eeuw. Dit is de ontdekking van het foto-elektrisch effect door Heinrich Hertz. Voor de theoretische verklaring van dit effect in 1905 ontving Albert Einstein in 1921 de Nobelprijs voor natuurkunde.

Het woord 'foto' slaat op licht, het woord 'elektrisch' op elektronen. Bij het **foto-elektrisch effect** schijn je licht op een metaal of een halfgeleider en kijk je of je op die manier elektronen uit het materiaal kunt losmaken. Daar is energie voor nodig. Voor de vraag of het lukt om elektronen los te maken, blijkt de totale hoeveelheid energie niet van belang te zijn. Als je op een bepaald metaal met rood licht schijnt en er komt geen elektron vrij, dan helpt het niet om de intensiteit van dat rode licht te verhogen. Het helpt ook niet om langere tijd rood licht op het materiaal te schijnen, er komen nog steeds geen elektronen vrij. Kennelijk kunnen de elektronen geen energie uit de straling verzamelen of opsparen, om daarmee uit het materiaal te komen.

Wat wel helpt, is een andere kleur licht nemen. Om precies te zijn, het helpt om in de volgorde van de kleuren van de regenboog naar de blauwe kant op te schuiven. Dan ga je naar kleinere golflengtes, wat via $f=c/\lambda$ neerkomt op grotere frequenties. Bij een bepaalde kleur komen er wel elektronen uit het materiaal, en dan ook onmiddellijk, er is geen tijd nodig om energie op te sparen. Bij welke frequentie dit precies gebeurt, is per materiaal verschillend, maar het is altijd zo dat het met kleuren met golflengtes aan de rode kant niet lukt, en na een bepaalde grens lukt het aan de blauwe kant wel.

Dit verklaarde Einstein door aan te nemen dat het licht bestaat uit pakketjes energie, die in één klap geabsorbeerd kunnen worden.

Foton

De energie van die pakketjes, die **fotonen** worden genoemd, wordt gegeven door:

$$E = h \cdot f$$

Symbolen: E is energie in Joule (J), h is de constante van Planck, die we bij de de broglie-golflengte tegenkwamen. De waarde van deze constante is $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js ; f is de frequentie van het licht in Hertz (Hz).

Blauw licht heeft een grotere frequentie dan rood licht. De fotonen hebben dan een grotere energie. Als je boven de grensfrequentie van een materiaal zit, is die energie groot genoeg om een elektron in één klap voldoende energie te geven om uit het materiaal te komen. Het elektron absorbeert dan zo'n foton.

Intensief rood licht bestaat dan wel uit heel veel fotonen, maar die pakketjes energie zijn allemaal per stuk te klein om een elektron los te maken. Het moet in één klap, een elektron kan geen fotonen sparen.



Figuur 1. 17 Digitale camera

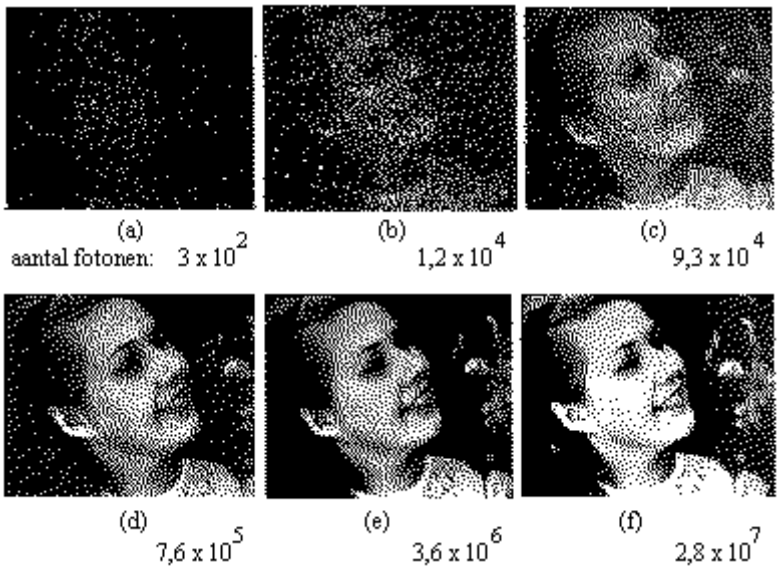
Dit blijkt verder toepasbaar op het hele elektromagnetisch spectrum, dat bestaat helemaal uit fotonen, die een steeds grotere energie krijgen als je van radiostraling naar infrarood, rood, oranje, geel, groen, blauw, violet, ultraviolet, röntgenstraling en gammastraling gaat.

Een digitale camera werkt met dit foto-elektrisch effect. Fotonen maken elektronen vrij, de informatie over waar dat gebeurt wordt langs elektronische weg verwerkt.

Licht heeft een golfkarakter en een deeltjeskarakter

Dat lichtpakketjes in hun geheel worden geabsorbeerd of niet, dat is niet erg golfachtig. Je bent gewend te denken dat golven een willekeurige amplitude en dus een willekeurige hoeveelheid energie kunnen hebben, en een willekeurig deel van hun energie kunnen afgeven. Voor licht is dat dus niet zo.

Licht heeft wel golfeigenschappen, dat zie je aan de proef van Young. Maar het heeft ook deeltjeseigenschappen, dat zie je aan het foto-elektrisch effect. Op welke plaats de fotonen terechtkomen, dat wordt bepaald door de golfeigenschappen. Maar licht wordt als hele deeltjes geabsorbeerd.



Figuur 1.18 Fotonen worden per stuk geabsorbeerd. Op sommige plaatsen komen er meer terecht, op andere minder. Ontleend aan A. Rose, Adv. in biol. and med. phys., 5, 211, 1957

Vanwege de kleine waarde van de constante van Planck, zijn de energiepakketjes $E=h\cdot f$ klein, voor zichtbaar licht ongeveer 10^{-18} J, een miljardste van een miljardste van de energie die nodig is om een kilogram tien centimeter op te tillen. Maar net als bij afmetingen zegt een kleine getalswaarde niets. Het gaat erom waar je het mee vergelijkt. Als er een foton op jou schijnt, val je daar echt niet van om. Vergeleken met de energie die daarvoor nodig is, is de energie klein. Maar voor een elektron is het veel om te absorberen. Je

merkt iets van de afzonderlijke fotonen als de totale energie klein is, dan is één foton een slok op een borrel.

Conclusies en vooruitblik

Uiteindelijk lijken fotonen en elektronen veel op elkaar. De kans om ze op een bepaalde plaats aan te treffen wordt bepaald door interferentie en dus door het golfkarakter, absorptie vindt plaats als hele deeltjes.

De de broglie-golflengte van deeltjes is meestal kleiner dan de golflengte van zichtbaar licht. Bij elektronen merk je vaak niets van het golfkarakter, omdat de de broglie-golflengte $\lambda=h/(m\cdot v)$ veel kleiner is dan de afmetingen van het systeem, zodat je niets van interferentie merkt. De kleine waarde van de constante van Planck zorgt dat deze golflengte zo klein is.

Bij fotonen is juist het deeltjeskarakter vaak niet merkbaar, omdat de energiepakketjes $E = h \cdot f$ zo klein zijn, en je er vaak een heleboel tegelijk hebt. Je merkt niet dat een lamp afzonderlijke fotonen uitzendt, omdat het er zo veel zijn, net als je de afzonderlijke moleculen van de lucht niet ziet omdat het heel veel, heel kleine moleculen zijn. De energie van de fotonen is zo klein omdat de constante van Planck zo klein is. De onderliggende oorzaak van zowel het feit dat je bij elektronen soms weinig merkt van het golfkarakter en het feit dat je bij licht soms weinig merkt van het deeltjeskarakter, is dus dezelfde.

In het volgende hoofdstuk onderzoeken we gevolgen van het golfkarakter van elektronen. In hoofdstuk vier gaat het om toepassingen van zowel het golfkarakter van elektronen als het deeltjeskarakter van licht.

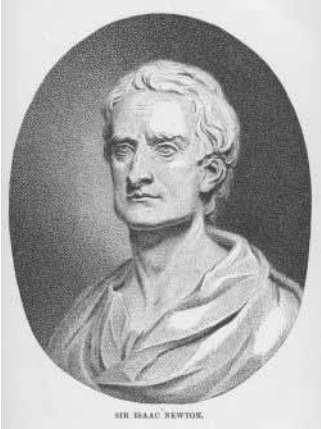
Begrippen

Deeltje
Golf
Interferentie
Foton
De broglie-golflengte
Golf-deeltje-dualiteit

Samenvatting

- **Deeltjes** zijn kleine materiële voorwerpen, zoals atomen, moleculen, elektronen. Deeltjes zijn telbaar.
- **Golven** hebben een uitgebreidheid en kunnen **interferentie** vertonen. Interferentieverschijnselen treden op als de golflengte ten minste net zo groot is als de ruimtes waar de golven in bewegen. Licht vertoont interferentie en is dus een golfverschijnsel.
- **Licht** wordt in pakketjes geabsorbeerd en uitgezonden, licht heeft dus behalve een golfkarakter ook een deeltjeskarakter.
- De lichtdeeltjes heten **fotonen**, hun energie wordt gegeven door $E = h \cdot f$, waarbij f de frequentie van het licht is. Doordat de **constante van Planck** een kleine waarde heeft, zijn dit kleine pakketjes energie.
- Elektronen vertonen **interferentie** en hebben dus behalve een deeltjeskarakter ook een golfkarakter.
- De **de broglie-golflengte** behorende bij een materiedeeltje wordt gegeven door $\lambda = h / m \cdot v$ Doordat de waarde van de constante van Planck $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js heel klein is, gaat het meestal om een heel kleine golflengte.
- Elektronen en licht lijken op elkaar; beide hebben zowel golfeigenschappen als deeltjeseigenschappen; dat wordt **golf-deeltje-dualiteit** genoemd. Dat elektronen een golfkarakter hebben, merk je vooral in systemen op atomaire schaal, evenals het deeltjeskarakter van licht.

Opgaven



Figuur 1. 19 Isaac Newton

1 Ken je klassieken

Vul de juiste letter in: a (versnelling), v (snelheid) of x (positie).

a. Als op een deeltje geen kracht werkt, geldt altijd .... = 0.
b. ... is in dat geval constant.
c. Bij zo'n 'eenparige beweging' geldt ... = $v \cdot t$.
d. Als op een deeltje een constante kracht werkt, geldt ... = $a \cdot t$
e. Als je een constante kracht hebt en met snelheid $v = 0$ in positie $x = 0$ begint, geldt $x = ½ \ldots t^2$.
f. Leg uit waar je aan ziet dat de bewering in vraag e) gaat over een deeltje, niet over een golf.



Figuur 1. 20 Wave

2 Klassieke muziek

a. Leg uit dat de 'wave' in een stadion inderdaad een golfverschijnsel is. Ga daarbij in op de vraag wat zich hier verplaatst.
b. Als één persoon opstaat, is dat nog geen wave. Welke eigenschap heeft een golf altijd, waar één persoon die opstaat niet aan voldoet?
c. Wat zie je als je een kaars laat branden terwijl hij vlak voor een luidspreker staat die een bromtoon afgeeft? Probeer het, kijk uit voor brand, wees voorzichtig!
d. Leg uit dat het antwoord van vraag c) laat zien dat geluid een golfverschijnsel is.
e. Zoek op google de advertentie uit de jaren 80 van Maxell (zoektermen Maxell, advertisement, blown away). Leg uit dat wat je ziet niet klopt met het golfkarakter van geluid.



Figuur 1. 21 Televisie

3 Klassieke beeldbuis

Een elektron in een ouderwetse televisie wordt versneld door een spanning van 2,5 kV. De elektrische energie $e \cdot \Delta V$ wordt omgezet in kinetische energie. De e is de lading van het elektron.

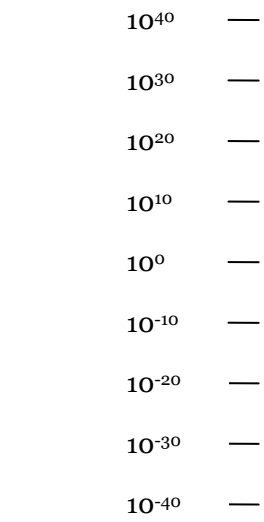
a. Bereken de kinetische energie van het elektron, uitgedrukt in joule.
b. Bereken de snelheid waarmee het elektron het beeldscherm treft.

4 Energie op schaal

a. Bereken de kinetische energie van de aarde in haar baan rond de zon.
b. Maak een schatting van de kinetische energie van een auto die op de snelweg rijdt.
c. Maak een schatting van de kinetische energie van een tennisbal na het serveren.

Hoe hoger de temperatuur, hoe hoger de gemiddelde kinetische energie van gasmoleculen.

d. Leg aan de hand van de formule voor kinetische energie uit dat stikstofmoleculen in de lucht gemiddeld sneller bewegen dan zuurstofmoleculen.



Figuur 1.22 Logschaal

Het precieze verband tussen de gemiddelde kinetische energie van moleculen en de absolute temperatuur T (in Kelvin), is $E_{kin,\ gemiddeld} = 3/2\ k \cdot T$. Hierbij is k de constante van Boltzmann: $k = 1{,}380 \cdot 10^{-23}$ J/K . De factor 3/2 heeft met de drie dimensies van de ruimte te maken.

e. Bereken de gemiddelde kinetische energie van de stikstofmoleculen in de lucht die je nu inademt.
f. Bereken de gemiddelde snelheid van de stikstofmoleculen.
g. Zet alle gevonden energieën op een logaritmische schaal (zie figuur 1.22).

5 Groot of klein

Iets is allen klein of groot vergeleken met iets anders. Als er op aarde maar één mens zou zijn, en die zou 1 meter 50 lang zijn, dan zou hij zichzelf niet klein vinden. Vul de volgende zinnen aan:

a. Een lengte van 1,50 meter is klein vergeleken met ….
b. Je merkt iets van interferentie van geluid als de golflengte van het geluid groot is ten opzichte van….
c. Je merkt iets van interferentie van lichtgolven in een proef met twee spleten, als de golflengte …….

6 Door de vingers zien

Doe het volgende proefje in een kamer waar je naar een raam kunt kijken waar helder licht door komt. Zorg dat de kamer verder vrij donker is.

Houd je wijsvinger en duim heel dicht bij elkaar op een paar centimeter voor je oog. Houd je andere oog dicht.

a. Kijk in de richting van het raam. Kun je een interferentiepatroon zien?
b. Zie je een interferentiepatroon als je door een heel klein gaatje in een dik vel papier kijkt?
c. Klopt wat je ziet met de regel ‘Je merkt alleen iets van interferentie als de golflengte vrij groot is vergeleken met de afmeting van de ruimte waar de golf doorheen moet?’

7 Lichtapplet

Onderzoek met de applet die je vindt op het webadres fys.kuleuven.be/pradem/applets/RUG/young/young1.htm hoe het interferentiepatroon in de proef van Young afhangt van de afstand tussen de twee spleten en van de golflengte van het licht. Omschrijf de resultaten.

8 Fasecontrastmicroscoop volgens Wikipedia

De Groningse natuurkundige Frits Zernike (die werkzaam was aan de Rijksuniversiteit Groningen) ontving op 11 december 1953 de Nobelprijs voor de Natuurkunde voor zijn ontdekking van de fasecontrastmicroscoop. Het was een nieuwe techniek waarmee het tot dan toe onzichtbare zichtbaar gemaakt kon worden. Zernike begon zijn onderzoek rond 1930.
Met name voor de biologie en de geneeskunde is de vinding van groot belang, omdat de fasecontrastmicroscoop het mogelijk maakt om in levende cellen de inwendige structuur te kunnen zien. Zo kan bijvoorbeeld van levende bacteriën het proces van celdeling gevolgd worden. Voordat de fasecontrastmicroscoop was uitgevonden, kon men cellen alleen goed bekijken nadat kleurstoffen waren gebruikt, maar daar gaat de cel dood van.

De **fasecontrastmicroscoop** lijkt veel op een lichtmicroscoop maar is voorzien van een speciaal 'faseplaatje' tussen de condensor en het preparaat. Dit zorgt ervoor dat twee lichtbundels met een onderling faseverschil door het transparante preparaat vallen. Door interferentie van deze twee beelden ontstaat een diepte-effect.

Waar blijkt uit deze tekst dat de fasecontrastmicroscoop gebruik maakt van het golfkarakter van licht?

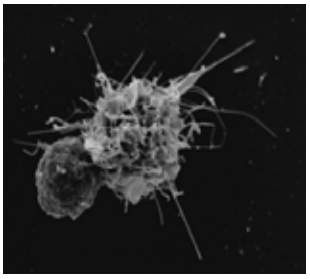
9 Niet voor macroscopische objecten?



Figuur 1. 23 Macroscopisch

a. Bereken de de broglie-golflengte van een auto van 1000 kg die met een snelheid van 70 km/h rijdt.
b. Leg uit dat het voor de auto niet uitmaakt dat je zijn positie op de weg niet precies weet, maar alleen op de de broglie-golflengte na, dat er dus een onzekerheid van die grootte in de positie is.
c. Maak een schatting van de onbepaaldheid in de positie van een tennisbal na het serveren.
d. Leg uit dat de de broglie-golflengte in de praktijk alleen relevant is voor heel lichte deeltjes.

10 Elektronenmicroscoop volgens Wikipedia



Figuur 1.24 Cel met details

Elektronenmicroscopie is een techniek die gebruik maakt van elektronen om het oppervlak of de inhoud van objecten af te beelden. Doordat versnelde elektronen een veel kleinere golflengte hebben dan fotonen kan de resolutie van een elektronenmicroscoop veel hoger zijn (beter dan 0,1 nm) dan die van een lichtmicroscoop (ongeveer 0.2 µm). Daarnaast hebben elektronen een andere wisselwerking met de materie zodat er een ander contrast verkregen kan worden. Bij lichtmicroscopie wordt de resolutie beperkt door de golflengte van het licht, bij elektronenmicroscopen wordt de resolutie beperkt door de afwijkingen van de optiek, want elektronenlenzen zijn in vergelijking met optische lenzen van veel slechtere kwaliteit.

a. Het kleinste detail dat je met een elektronenmicroscoop kunt zien is kleiner dan dat wat je met een lichtmicroscoop kunt zien. Hoeveel keer zo klein?
b. Bereken de snelheid van elektronen die een de broglie-golflengte van 0,1 nm hebben.
c. Bereken met welke spanning elektronen moeten worden versneld om deze snelheid te krijgen.

11 Neutronendiffractie

Neutronendiffractie is een techniek waarmee je naar atomen kunt kijken door er neutronen op te schieten en te kijken naar het interferentiepatroon dat ontstaat. Eigenlijk is de de broglie-golflengte van de neutronen die uit een bron komen te klein om de in dit geval gewenste interferentieverschijnselen te krijgen.

Moet je de neutronen afkoelen of heter maken om de gewenste grotere de broglie-golflengte te krijgen? Leg je antwoord uit met behulp van formules.

12 Is 1 plus 2 gelijk aan 1 én 2?

Zowel in het geval van licht als in het geval van elektronen die op twee spleten vallen, kun je ook eerst een tijdje één spleet open houden en de andere dicht. Je krijgt dan één maximum achter de spleet. Na een tijdje wissel je het om: de ene spleet dicht, de andere open.

a. Schets wat je dan uiteindelijk ziet op je fotografische plaat achter de spleten.

b. Leg uit wat er anders is vergeleken met wat je ziet als je de twee spleten een tijd lang tegelijk open houdt.

c. Leg uit dat het resultaat voor twee spleten tegelijk inhoudt dat datgene wat je er op stuurt (licht of elektronen) niet op één punt gelokaliseerd is.

d. Leg uit hoe je kunt testen of dit om een interactie tussen de elektronen gaat, of om een fundamentele eigenschap van elk elektron.

13 Is de lucht klassiek?



Figuur 1.25 Luchtbellen in een vloeistof

We kijken of het gerechtvaardigd is om de lucht als een klassiek gas te beschouwen. Dat is zo als je kunt zeggen dat de moleculen een klassieke baan doorlopen tot ze op een ander molecuul botsen, waarbij je er geen rekening mee hoeft te houden dat het molecuul ook een golfkarakter heeft. Dat kan als de de broglie-golflengte veel kleiner is dan de afstand tussen de moleculen. Er zijn dan geen interferentieverschijnselen.

a. Bepaal de orde van grootte van de afstand tussen luchtmoleculen, door de dichtheid van een gas met de dichtheid van een vloeistof te vergelijken. De grootte van een zuurstof of een stikstofmolecuul is ongeveer 0,3 nanometer.

b. EXTRA: Schat nogmaals de afstand tussen luchtmoleculen, maar nu door gebruik te maken van de algemene gaswet $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$. Is de uitkomst vergelijkbaar met die van vraag a)?

c. Laat met een berekening zien dat de gemiddelde snelheid van luchtmoleculen bij een temperatuur van 300 K rond de $5 \cdot 10^2$ m/s ligt. Gebruik hierbij het eerder genoemde verband $E_{\text{kin, gemiddeld}} = 3/2\ k \cdot T$ met

   $k = 1{,}380 \cdot 10^{-23}$ J/K.

d. Bepaal de de broglie-golflengte van de stikstofmoleculen.

e. Is de aanname gerechtvaardigd dat lucht zich klassiek gedraagt?

f. EXTRA: Tot hier ging het om de tegenstelling klassiek-quantum. Nu gaan we kijken naar de tegenstelling klassiek-relativistisch. Klassiek wordt de kinetische energie gegeven door $E_{\text{kin}} = 1/2\ m \cdot v^2$. Relativistisch is de kinetische energie gelijk aan de totale energie $E = m \cdot c^2$ min de rustenergie $E = m_0 \cdot c^2$, hierbij is m_0 de rustmassa en $m = m_0 \cdot (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Bereken de kinetische energie van een stikstofmolecuul op de klassieke en de relativistische manier. Als er weinig verschil is, is de klassieke methode goed genoeg en is een relativistische benadering niet nodig. Is dat hier zo?

14 Zijn de elektronen in een atoom een klassiek zonnestelseltje?

Zou je de elektronen in een atoom als klassiek kunnen beschouwen? Als geladen balletjes die klassieke banen doorlopen, dus met een door de wetten van Newton precies vastgelegde positie? Dat zou zo zijn als de de broglie-golflengte veel kleiner is dan de afstand tussen elektronen, en veel kleiner dan de afstand tot de kern. We bekijken het eenvoudigste atoom, het waterstofatoom.

a. Zoek op hoe groot een waterstofatoom is.

Het elektron is in ieder geval geen gewoon deeltje, maar een geladen deeltje. Dat zou, als het zich inderdaad klassiek gedroeg, rond de kern cirkelen als een planeet rond een zon. De snelheid zou volgen uit het gelijkstellen van de

middelpuntzoekende kracht aan de elektrische aantrekkingskracht: $m \cdot v^2/r = f \cdot e^2/r^2$, met m de massa van het elektron, r de straal van de baan en e de lading van het elektron. De constante f geeft aan hoe sterk de elektrische kracht is, de waarde is $8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$.

b. Bereken de snelheid die het elektron zou hebben, als het een baan zou hebben met de zelfde straal als de straal van een waterstofatoom.
c. Bereken de bijbehorende de broglie-golflengte.
d. Is de aanname gerechtvaardigd dat de elektronen in atomen zich klassiek gedragen?



Figuur 1. 26 Gloeilamp

15 Fotonen tellen

Een lamp verbruikt 60 watt energie, 7 procent daarvan wordt omgezet in zichtbaar licht. Neem als golflengte van dit licht een gemiddelde waarde: 550 nm.

a. Bereken het aantal fotonen dat de lamp per seconde uitzendt in het zichtbare gebied.

Op een magnetron staat “2450 MHz” en “800 W”

b. Bereken het aantal fotonen dat de magnetron per seconde produceert.

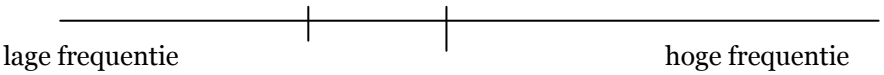
16 Digitale infraroodfotografie



Figuur 1. 27 Infraroodopname met digitale camera

Met een gewone digitale camera kun je infraroodopnames maken, zoals de foto hiernaast. Je zet dan een filter voor de lens, die het zichtbare licht wegvangt. De infrarode straling zorgt dan voor een beeld. Niet alle fotonen die door het filter komen dragen bij aan de opname. Te ver in het infrarood hebben ze te weinig energie.

a. Voor welk quantummechanisch proces moeten de fotonen genoeg energie hebben om een beeld te maken?
b. Zet op de schaal hieronder de begrippen “IR-foto”, “te lage frequentie” en “opgevangen door filter” op de juiste plaats.



c. Je ziet dat bomen veel infrarode straling reflecteren. Waarom is het nuttig dat ze niet al die straling absorberen?



Figuur 1. 28 Soldaten in de nacht

17 Nachtzichtkijker

In elke digitale camera zit een CCD (Charge Coupled Device), waarin een materiaal zit waaruit fotonen elektronen kunnen losmaken. Leg uit wat je weet over de energie die nodig is om een elektron los te maken in een nachtzichtkijker, vergeleken met een gewone digitale camera.

18 In staafjes en kegeltjes: quantummechanisch kijken?

Zoek op internet hoe staafjes en kegeltjes in je oog licht absorberen. Hoeveel fotonen hebben ze nodig? Wat gebeurt er als één foton wordt geabsorbeerd? Wat zijn de verschillen tussen de staafjes en de kegeltjes, en tussen de verschillende kegeltjes onderling? Kun je zeggen dat je bij het kijken gebruikmaakt van quantumeffecten?



Figuur 1. 29 Fotosynthese

19 Planten

Planten groeien als ze genoeg licht krijgen. Als ze geen zichtbaar licht krijgen maar infrarode straling, dan groeien ze niet, ook al maak je de intensiteit zo groot dat het totale vermogen dat de planten ontvangen groter is dan dat van zonlicht op een zomerse dag. Leg uit hoe dat kan, gebruik de term *fotonen* in je antwoord.

20 Fotonen of golven?

I. In een magnetron wordt straling gemaakt met een frequentie van 2450 MHz. In de ruimte van de magnetron zijn plaatsen waar de tegen de wanden reflecterende straling zorgt voor extra intensiteit, en er zijn plaatsen waar er juist minder intensiteit is. Daarom moet het eten ronddraaien, zodat alles even heet wordt. Als je de draaitafel eruit haalt, kun je een reep chocola er in leggen. De afstand tussen de plekken waar hij snel smelt, is de helft van de golflengte van de straling. Omdat je ook de frequentie weet, kun je door die afstand te meten de lichtsnelheid bepalen.

II. Er is een gebiedje in het UV-spectrum dat alleen door de stof ozon wordt tegengehouden. De moleculen zijn in staat om precies de met dat soort UV-straling overeenkomende energie te absorberen. Bij andere stoffen gebeurt dat niet. Als er geen ozon is, bereikt deze straling de aarde, en dat is schadelijk voor de huid.

Eén van de twee bovenstaande stukjes gaat alleen over de golfeigenschappen van elektromagnetische straling, en maakt geen gebruik van de foton energie. Het andere stukje gaat juist vooral over de fotonenergie. Leg uit welk van de twee stukjes gebruik maakt van het foton en welk niet.

21 Lichtbotsingen

Vul de open plekken in onderstaande tekst. Kies uit *afbuighoek, biljartbal(len), elektronen, energie, foto-elektrisch effect, fotonen, frequentie, rechtdoor, schampt*. Een woord mag meerdere keren worden gebruikt.

Behalve het … **a**… is er nog een effect dat laat zien dat elektromagnetische straling uit …**b**… bestaat.

Arthur Compton scheen met Röntgenstraling op grafiet. Het bleek dat het deel van de straling dat vrijwel …**c**… ging, ook vrijwel dezelfde …**d…** hield. Hoe groter de …**e**…, hoe meer de …**f**… veranderde. Die werd kleiner dan de …**g**… van de straling die hij er op scheen. Het was alsof de straling een andere kleur kreeg.

We vergelijken de situatie met botsende …**h**…. Als de ene …**i**… de andere …**j**…, gaat hij vrijwel …**k**… en verliest hij vrijwel geen snelheid en dus vrijwel geen …**l**…. Als hij er anders op komt en flink van richting verandert, gaat hij na de botsing een stuk langzamer, en verliest hij dus veel …**m**…. Hier is dus een verband tussen de …**n**… en de verandering van …**o**….

Als je nu aanneemt dat de Röntgenstraling bestaat uit …**p**… met …**q**… gelijk aan $h \cdot f$, die botsen met …**r**.. in het grafiet, klopt de analogie. Meer van richting veranderen komt overeen met meer verlies aan …**s**….

Het Comptoneffect overtuigde de natuurkundigen er van dat elektromagnetische straling zich inderdaad in sommige opzichten gedraagt als een stroom deeltjes, de …**t**…

3 Het tunneleffect en onbepaaldheid

Hoofdstukvragen	**Wat is het quantum tunneleffect? Waar hangt het tempo van tunnelen van af? Hoe precies kunnen snelheid en positie vastliggen?**



Figuur 3.1 Radioactief!

De golfeigenschappen van deeltjes zorgen ervoor dat ze kunnen komen op plaatsen waar ze zonder die eigenschappen nooit zouden kunnen komen. Dat was zo bij de proef waarbij elektronen op twee spleten worden afgestuurd, en we zullen zien dat dit ook het geval is als de deeltjes worden opgesloten in een kleine ruimte, met een barrière eromheen die zo hoog is dat de deeltjes er normaal gesproken niet uit zouden kunnen ontsnappen. Door de golfeigenschappen is er een kans dat ze er toch uit komen.

Dat heeft gevolgen voor een aantal praktijksituaties. We nemen als voorbeelden radioactiviteit en een bijzonder soort microscoop die zelfs afzonderlijke atomen zichtbaar kan maken: de Scanning Tunneling Microscope (STM).

3.1 Twee vreemde verschijnselen

Radioactiviteit

Het verschijnsel α-straling heeft een aantal eigenschappen die je niet zomaar kunt verklaren:

- Een kern zendt spontaan een α-deeltje uit. De kern blijft een hele tijd hetzelfde, en plotseling gebeurt dat, zonder externe oorzaak.
- Je weet van een stof alleen na hoeveel tijd de kernen *gemiddeld* vervallen. Na een bepaalde tijd is de helft vervallen en de helft niet. Je kunt nergens aan zien op welk moment een bepaalde individuele kern zal gaan vervallen.
- In tegenstelling tot chemische reacties gaan vervalsprocessen niet sneller als je de temperatuur verhoogt.

Scanning Tunneling Microscope

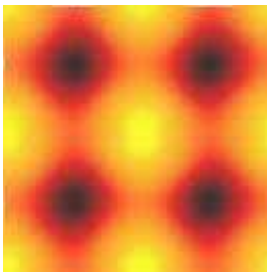
De STM werkt met een heel dun naaldje, dat op heel korte afstand boven het oppervlak van een metaal beweegt. Er springen elektronen over van het naaldje naar het metaal, terwijl het naaldje en het metaaloppervlak geen contact maken. Als de elektronen geladen deeltjes zonder golfeigenschappen zouden zijn, dan zouden ze de afstand nooit kunnen overbruggen.



Figuur 3.2 Principe van de STM

Het naaldje scant het oppervlak (dat is de S in STM), dat wil zeggen dat het van links naar rechts en van voor naar achter het oppervlak aftast.

Het aantal elektronen dat overspringt, hangt sterk af van de afstand van het puntje van de naald tot het metaal. Als het naaldje boven een uitstekend stukje terechtkomt, dreigt de stroom van elektronen die overspringen te groot te worden. Een terugkoppelingsmechanisme trekt het naaldje dan naar boven, zodat de afstand tot het oppervlak even groot blijft.



Figuur 3.3 STM-afbeelding van vier ionen

De beweging van het naaldje van boven naar beneden wordt bijgehouden, daarin zit de informatie over hoe het oppervlak eruit ziet. Doordat de stroom zo sterk afhangt van de afstand, kunnen oneffenheden die kleiner zijn dan een atoom worden geregistreerd.

Het overspringen van elektronen blijkt onafhankelijk van de temperatuur te gebeuren, het gebeurt ook bij het absolute nulpunt.

We kijken eerst naar de verschillende manieren waarop voorwerpen van hun plaats kunnen komen. De bedoeling is om in te leren zien dat wat in een STM en bij α-straling gebeurt heel bijzonder is, en dat je begrijpt waarom die speciale gevallen van verplaatsingen van deeltjes om een nieuw soort verklaring vragen.

Oriëntatieopdracht - Hoe komt iets van zijn plaats?

Vul de juiste woorden in op de juiste plaats. Kies uit: emissie, energie, fluctueert, foton, lichter, meteoor, ondieper, thermische

Een strandbal die in een kuil in de duinen ligt, kan op verschillende manieren van zijn plaats komen. Een kind kan hem oppakken en ergens anders neerleggen. Het kind levert de ...**a**... om de bal uit de kuil te tillen. Die is gelijk aan $E_z=m \bullet g \bullet h$, het kost dus meer moeite bij een diepere kuil of bij een zwaardere bal.



Figuur 3.4 Strandbal

De ...**b**... om uit de kuil te komen kan ook worden geleverd door een windvlaag. Een groot aantal luchtmoleculen beweegt dan gemiddeld één kant op. Ze botsen tegen de bal en duwen hem van zijn plaats. De wind is niet constant, hij ...**c**.... Het is een kwestie van toeval of de bal uit de kuil waait. Het moment waarop het gebeurt is niet te voorspellen. Wel is de kans dat het gebeurt groter als de kuil ...**d**... is of als de bal ....**e**... is.

Als een elektron voldoende energie krijgt, kan het een stuk metaal verlaten. Bij het foto-elektrisch effect krijgt een elektron zijn energie in één keer, het absorbeert dan één ...**f**.... Maar in ouderwetse televisies komen de elektronen vrij doordat het metaal heel heet wordt gemaakt. Dit heet thermische ...**g**.... Willekeurige warmtebewegingen geven de elektronen hun energie. Hoe heter, hoe meer elektronen vrijkomen.

Ook de moleculen in een gas voeren willekeurige bewegingen uit, die groter zijn naarmate de temperatuur hoger is. Deze thermische fluctuaties zorgen dat een gas diffundeert, ze zorgen dus dat je bijvoorbeeld gasmoleculen die ergens ontsnappen na een tijdje in je neus kunt waarnemen. Bij het absolute nulpunt houden deze ...**h**... fluctuaties op. Als een verschijnsel niet afhankelijk is van de temperatuur, dan weet je dat ...**i**... fluctuaties niet de oorzaak van het effect zijn.



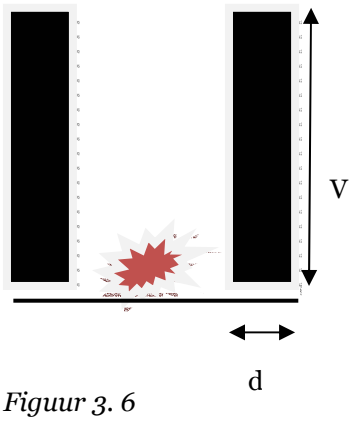
Figuur 3.5 Kuilen op de maan

Op de maan zou een strandbal eeuwig in dezelfde kuil kunnen blijven liggen. Er zijn geen maanmannetjes om hem op te pakken, er is geen wind die hem wegblaast. De moleculen van de maanbodem trillen wel en tikken daarbij tegen de bal, maar deze thermische fluctuaties zijn veel te klein om een strandbal te verplaatsen. Een maanbeving of de inslag van een ...**j**..., dat zouden wel oorzaken van een verplaatsing kunnen zijn.

3.2 Het quantum tunneleffect

Een opgesloten quantumdeeltje

Een elektron in de punt van het naaldje van een STM en een α-deeltje in een zware kern zijn quantumdeeltjes die zijn opgesloten in een kleine ruimte.



Figuur 3. 6
Quantumdeeltje in een put

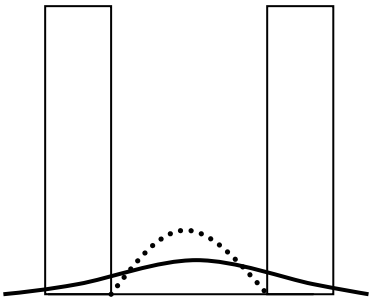
Hiernaast zie je een schets van de situatie. In het midden is het gebiedje waarbinnen het quantumdeeltje zich bevindt. Dan volgt een barrière met een bepaalde breedte, dit zijn de zwarte rechthoeken in figuur 3.6. Dit is het gebied waar het deeltje niet makkelijk kan komen, het kost extra energie om daar te zijn. Bij de STM is dat het gebied tussen de punt van de naald en het metaaloppervlak. Voor het α-deeltje is dit de rand van de kern die het deeltje tegenhoudt. Voorbij de barrière kan het deeltje wel zijn zonder dat het energie kost. In het geval van de STM is dat in het metaaloppervlak waar de naald boven hangt, in het geval van α-straling is dat de ruimte buiten de kern.

Geen thermische fluctuaties

Hoe weet je nu dat de quantumdeeltjes niet gewoon over de rand van de barrière gaan? Er zijn wel andere situaties waarbij dat gebeurt, bijvoorbeeld bij gasmoleculen in een bakje zonder deksel. Een zwaar gas blijft een tijdje gelokaliseerd in zo'n ruimte, maar af en toe ontsnapt een molecuul. Dat is dan een molecuul dat bij het onderling botsen van alle moleculen op een bepaald moment toevallig wat extra snelheid heeft gekregen. Je zegt dan dat moleculen ontsnappen door thermische fluctuaties. Dit proces gaat sneller als de temperatuur hoger is. En dat is precies waardoor je weet dat dit geen rol speelt bij de STM en bij α-straling: deze processen worden *niet* beïnvloed door een verandering van de temperatuur.

Quantumverklaring

Het puntje van de STM-naald is maar één atoom dik. De de broglie-golflengte van een elektron is dus niet verwaarloosbaar klein ten opzichte van de afmetingen van het systeem. We kunnen dus verwachten dat er gevolgen zullen zijn van het golfkarakter van het elektron. Dit geldt ook voor een α-deeltje in een kern. De volgende redenering over een elektron gaat dus net zo goed op voor een α-deeltje.



Figuur 3.7 De golf heeft ook een waarde buiten de barrière

We kijken wat er gebeurt als je een elektron probeert op te sluiten in een heel kleine ruimte. Elk systeem zoekt de laagst mogelijke energie, net als een voorwerp dat naar de aarde valt, waar de zwaarte-energie gelijk is aan nul. Eigenlijk zou je het elektron stil willen neerleggen op een vaste plek in het puntje, zodat de kinetische energie nul is, maar we zullen zien dat dit niet kan.

De kleine ruimte 'probeert' de de broglie-golflengte van een elektron te dwingen klein te blijven. Met $\lambda=h/p=h/(m\cdot v)$ zie je dat een kleine λ overeenkomt met een grote snelheid! Als je het elektron probeert in te sluiten, krijgt het dus meer snelheid en dus meer kinetische energie. Dit zou overeenkomen met het gestippelde golfje in figuur 3.7. Bij het zoeken naar de toestand met de laagst mogelijke energie gaat het om de balans tussen twee energiesoorten. Wat de energie van de barrière betreft is de toestand van het gestippelde lijntje in figuur 3.7 het meest gunstig, want de golf komt helemaal niet op de plaats van de barrière. Maar wat betreft de kinetische energie is dat niet zo. Wat die energiesoort betreft zou de golflengte zo groot mogelijk moeten zijn.

De natuur zoekt een compromis: een halve de broglie-golflengte die iets groter is dan de afmeting van de put, zodat de kinetische energie wat kleiner is dan wanneer de halve golf er precies in zou passen. Dit is de getrokken lijn in figuur 3.7. Daarbij spreidt de golf zich een beetje uit over de barrière heen.

Dat heeft op zich wel een grotere energie tot gevolg, want het kost energie om zich boven op de barrière te bevinden. Maar alles tezamen is de tussenoplossing het beste; het is de oplossing met- al met al - de laagste energie.

De golf spreidt zich zelfs een klein beetje uit aan de andere kant van de barrière. Waar de golf een waarde ongelijk aan nul heeft, is een kans het deeltje aan te treffen. De waarschijnlijkheid om een deeltje ergens aan te treffen is gelijk aan het kwadraat van de hoogte van het golfje op die positie. Door dit alles is er dus een kans het deeltje aan te treffen aan de andere kant van de barrière! Omdat het deeltje niet genoeg energie heeft om óver de barrière te gaan, maar toch aan de andere kant terechtkomt, noemt men dit in de natuurkunde het ***tunneleffect***.

Waarvan is het tempo van tunnelen afhankelijk?
De kans om het deeltje aan de andere kant van de barrière aan te treffen is kleiner naarmate de hoogte van het stukje van de golf dat buiten de barrière komt kleiner is. Waar hangt die hoogte van af?

- Als de barrière hoger is, dus als het een deeltje meer energie kost om zich op die plek te bevinden, dan drukt dat de golf sterker naar beneden. Er lekt dan een kleiner stukje van de golf naar buiten.
- Als de barrière in figuur 3.7 breder is, is er een kleiner staartje van de golf dat zich buiten de barrière bevindt.
- Als de massa van het deeltje groter is, is het gemakkelijker om een kleine de broglie-golflengte $\lambda=h/p=h/(m\cdot v)$ te hebben. Je ziet met

  $$E_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2} m \cdot v^2 = h^2 / \left(2m\lambda^2\right)$$

  dat bij een bepaalde vastliggende λ de kinetische energie evenredig is met $1/m$. Voor een grotere massa kost het dus minder extra kinetische energie om een kleinere de broglie-golflengte te hebben.

Het tempo van tunnelen ligt dus lager bij: grotere hoogte van de barrière, grotere breedte van de barrière, grotere massa van het tunnelende deeltje.

Redeneervoorbeeld

De halfwaardetijd van verschillende α-stralers staat in BINAS. Voor uranium-238 is de halfwaardetijd 4,5 miljard jaar. Voor polonium-209 is de halfwaardetijd 102 jaar.

Vragen:
Bij veel stofeigenschappen, bijvoorbeeld de dichtheid en de soortelijke weerstand, staat vermeld bij welke temperatuur deze is gemeten. Bij de halfwaardetijd is dat niet zo.

a. Waarom is de temperatuur niet vermeld in deze tabel?
b. Van welke drie factoren is een tunnelproces als α-straling afhankelijk?
c. Leg van elk van deze factoren uit welk verschil er zou kunnen zijn tussen uranium-238 en polonium-209.

Antwoorden:
a. Een tunneleffect zoals α-straling werkt niet via thermische fluctuaties, en is dus niet afhankelijk van de temperatuur.
b. De massa van het tunnelende deeltje, de hoogte van de barrière die het deeltje probeert in te sluiten, en de breedte van de barrière.
c. De massa van het tunnelende deeltje verschilt niet, het gaat in beide gevallen om een α-deeltje. De barrière is in het geval van uranium-238 hoger en/of breder dan in het geval van polonium-209. Dit weet je doordat het tunnelen langzamer verloopt.

3.3 EXTRA Hoe groot is de kans op tunneling?

De uitdrukking die de kans geeft dat een deeltje naar buiten tunnelt, kunnen we hier niet bewijzen, maar wel aannemelijk maken.

De kans op tunneling

De kans T dat een deeltje binnen een seconde naar buiten tunnelt is:

$$T = e^{-2d\sqrt{(4\pi m/h^2)(V-E)}}$$

Symbolen: d is de breedte van de barrière in meters (m), $(V-E)$ is de hoogte van de barrière min de energie die het deeltje zou hebben zonder quantumeffecten, in Joule (J) , $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js is de constante van Planck, m is de massa in kilogram (kg) en $\pi = 3{,}14159...$

Exponenten

10^{-3} is gelijk aan 0,001.
Dat is groter dan
10^{-10} want dat is gelijk aan
0,0000000001.
Als de exponent een groot negatief getal is, is de uitkomst heel klein. Als de exponent minder negatief is, is de uitkomst groter.

Deze kans om te tunnelen T wordt groter als de exponent een minder groot negatief getal wordt. Dat kan op de drie manieren die we eerder zonder formule bespraken:

- Een kleinere d, dus een smallere barrière.
- Een kleinere m, dus een lichter deeltje dat door de wand wil tunnelen.
- Een kleinere V, dus een lagere barrière.

Wat de formule betreft is er ook een vierde manier:

- De waarde van de constante van Planck kan niet variëren, maar een grotere waarde van h zou leiden tot een grotere kans om te tunnelen.

Als de kans om te tunnelen voor een elektron in een STM-naaldje bij een bepaalde afstand tussen het naaldje en het oppervlak gelijk is aan 0,001, dan is die kans gelijk aan 0,000001 bij de dubbele afstand. Behalve de d blijft alles in de exponent namelijk gelijk: de hoogte van de barrière V, de massa van het elektron m, de waarde van de constante van Planck h. De exponent als geheel verdubbelt dus. En omdat e^{2x} gelijk is aan $(e^x)^2$ moet je de uitkomst 0,001 die je had ook kwadrateren. Dan krijg je 0,000001. Zo zie je aan de formule dat de tunnelstroom enorm sterk afhangt van de afstand, een feit waar de STM gebruik van maakt om die afstand heel nauwkeurig vast te leggen.

Soms wordt net gedaan alsof door quantumtunneling alles mogelijk is, omdat de kans dat het gebeurt T nooit gelijk is aan nul, zelfs niet voor een olifant die door een muur zou tunnelen. Maar als je ziet dat een verdubbeling van de afstand al zorgt dat een kans van 0,001 gelijk wordt aan 0,000001, dan zie je wat er gebeurt als je als afstand de dikte van de muur invult, dus bijvoorbeeld 10 cm in plaats van een nanometer, dat is 100.000.000 keer zo veel als de afstand van een STM-naaldje tot een oppervlak. Dan ga je naar $(0{,}001)^{100000000}$. En dat is dan nog maar de kans dat één elektron die afstand aflegt door te tunnelen. Als je ook een massa van 3000 kg invult in plaats van de massa van een elektron, die gelijk is aan:
0,000000000000000000000000000001 kg, dan wordt de uitkomst wel erg klein. Een olifant zal nooit door een muur tunnelen in de levensduur van het heelal. Een olifant heeft een veel te kleine de broglie-golflengte, die gaat niet door een muur heen als hij er op afloopt. Tenminste, niet door te tunnelen.

3.4 Onbepaaldheidsrelatie



Figuur 3.8 Heisenberg

We zagen dat het niet mogelijk is een quantumdeeltje op een vaste positie met snelheid nul neer te leggen. Dit is algemener geformuleerd in de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg. De de broglie-golflengte geeft eigenlijk de onbepaaldheid in de positie weer: de positie ligt niet precies vast, het is alleen bekend dat die ergens in een gebiedje rond een bepaald punt ligt. De impuls (en dus ook de snelheid) is omgekeerd evenredig met de de broglie-golflengte: $p=h/\lambda$. Als je de positie exacter probeert vast te leggen, is er juist minder bekend over de impuls en dus de snelheid. De snelheid varieert over een groter gebied en de gemiddelde snelheid is dan hoger. De snelheid fluctueert, als je op verschillende momenten zou waarnemen, zou je verschillende snelheden vinden.

In hoeverre de positie onbepaald is, noemen we Δx. Als die ruimte waarin het elektron kan worden aangetroffen kleiner is, is er een grotere onbepaaldheid in de snelheid. Dus als Δx kleiner is, is Δv groter, en daardoor ook $\Delta p = m \cdot \Delta v$. Het verband tussen deze twee onbepaaldheden heet de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg, die luidt:

Onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg

$$\Delta x \cdot \Delta v = \frac{h}{4\pi \cdot m} \quad \text{of} \quad \Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{4\pi}$$

Symbolen: Δx is de onbepaaldheid in de positie in meter (m), Δv is de onbepaaldheid in de snelheid in meter per seconde (ms^{-1}), $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js is de constante van Planck, m is de massa in kilogram (kg) en $\pi = 3{,}14159...$

Valkuil

Het is niet zo dat de onbepaaldheidsrelatie alleen inhoudt dat de twee eigenschappen niet gelijktijdig kunnen worden gemeten. Dat is op zich wel waar, omdat je om de positie van een deeltje te meten licht op het deeltje moet schijnen. Het deeltje krijgt daar een klap van, op een ongecontroleerde manier, waardoor de snelheid minder vast ligt. Hoe preciezer je de positie meet, hoe kleiner de golflengte van het licht waarmee je meet moet zijn, en hoe groter de frequentie dus is. De energie van het foton is dan groot. Dus hoe nauwkeuriger je de positie meet, hoe groter de klap, en hoe onnauwkeuriger de snelheid bekend is.

Maar dit is niet het enige. Het systeem gedraagt zich, ook zonder dat je iets probeert te meten, alsof binnen het systeem de positie en de snelheid niet perfect nauwkeurig vastliggen. De tunnelverschijnselen in een STM en in een radioactieve stof laten dit zien.

De onbepaaldheidsrelatie werd in 1927 opgeschreven door Werner Heisenberg en geeft een uiterste ondergrens voor de nauwkeurigheid waarmee de plaats en de snelheid (of impuls) van een deeltje *tegelijkertijd* gemeten kan worden. Dit heeft niets van doen met de technische beperkingen van meetapparatuur, maar is een essentiële eigenschap van de natuur. De onbepaaldheid is heel klein doordat de constante van Planck klein is. Maar voor heel lichte deeltjes (kleine massa) zijn de gevolgen merkbaar. Volgens de onbepaaldheidsrelatie is er dus altijd een onbepaaldheid in de plaats en de snelheid. Dat houdt in dat een quantumdeeltje niet stil op één plaats in een kuiltje kan liggen, maar altijd fluctuaties uitvoert, onafhankelijk van de temperatuur. Men spreekt van **quantumfluctuaties**.

Of je nu kijkt naar de de brogliegolflengte, energieën van fotonen, onbepaaldheid, of tunneling, van quantumverschijnselen merk je alleen iets bij kleine deeltjes.

Begrippen

Quantumfluctuaties
Onbepaaldheidsrelatie
Tunnelen

Samenvatting

- Bij een STM en bij α-stralers komen deeltjes vrij. Dit is een manifestatie van een nieuw quantumverschijnsel: **het quantum tunneleffect**.
- Het quantum tunneleffect is **onafhankelijk van de temperatuur**.
- Het tunneleffect is **groter** als de barrière van de put waarin het deeltje zit **lager** is, of **smaller**, en als het tunnelende deeltje een **kleinere massa** heeft.
- Als een quantumdeeltje wordt opgesloten in een **kleine ruimte** is de de broglie-golflengte klein. Dat leidt via $\lambda=h/(m\cdot v)$ tot een **hoge kinetische energie** $E_{kin}=1/2\ m\cdot v^2$.
- Het verband tussen hoe precies de positie vastligt en hoe goed de snelheid vastligt, wordt gegeven door de **onbepaaldheidsrelatie**:

$$\Delta x \cdot \Delta v = \frac{h}{4\pi \cdot m} \quad \text{of} \quad \Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{4\pi}$$

Hierin is Δx de onbepaaldheid in de positie in meter (m), en Δv is de onbepaaldheid in de snelheid in meter per seconde (ms^{-1}).



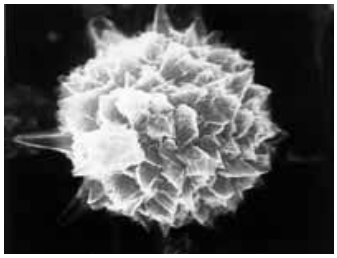
Figuur 3.9 Op de maan



Figuur 3.10 Gevaarlijke quantumfluctuaties



Figuur 3.11 Energie dankzij tunneling?



Figuur 3.12 Onregelmatig gevormde metaalkorrel

Opgaven

22 Oorzaak en gevolg

In alle onderstaande gevallen verandert iets van plaats. Dat kan door verschillende oorzaken komen. Bedenk steeds of het gaat om een verplaatsing met voorbedachten rade, een toevallige verplaatsing veroorzaakt door iets wat lijkt op windvlagen, door thermische fluctuaties, of door quantumfluctuaties.

a. In de atmosfeer van de aarde is geen waterstof aanwezig, dat is zo licht dat het in het heelal is verdwenen.
b. Een brief in een fles spoelt aan op het strand.
c. De maan heeft geen atmosfeer.
d. De elektronen in een metaal bewegen ook bij temperatuur 0 kelvin.
e. Je gaat op bezoek bij je neef in Haarlem.

23 α-straling

Uit een brokje uranium komt α-straling. Deze straling bestaat uit heliumkernen: twee protonen en twee neutronen. Deze heliumkernen komen uit de uraniumkernen. Normaal zitten ze daarin opgesloten. Er is een barrière die zorgt dat ze er niet uit gaan. Je wilt met een experiment uitzoeken of thermische fluctuaties de oorzaak er van zijn dat er af en toe wel eentje uit komt, of dat het om quantumfluctuaties gaat, en de heliumkernen door tunneling vrijkomen.

a. Leg uit met welk experiment je kunt bepalen om welk soort fluctuaties het gaat.
b. Radium heeft een veel kleinere halfwaardetijd dan uranium. Wat kun je zeggen over de barrière die probeert te voorkomen dat de heliumkernen de moederkern verlaten? Er zijn twee mogelijke verschillen tussen de barrière bij radium en die bij uranium, noem ze allebei.

24 Kernfusie

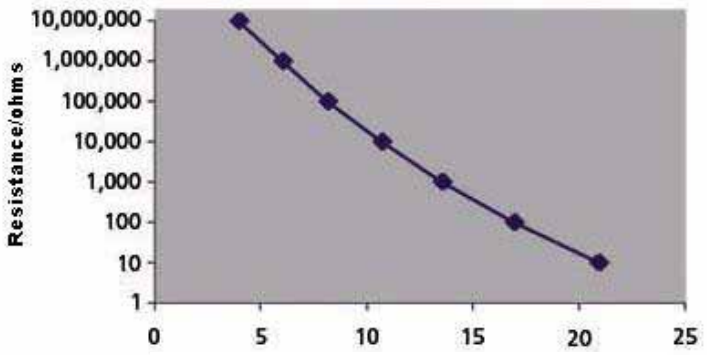
In de zon vindt kernfusie plaats. Als protonen dicht genoeg bij elkaar zijn, is de sterke kernkracht de baas en fuseren ze. Maar eerst moeten ze als ze elkaar naderen de elektrische afstoting overwinnen. Daarom vindt kernfusie alleen plaats als de temperatuur en de druk hoog zijn, zodat de kernen genoeg energie hebben om elkaar dicht te naderen. Op het laatst, als de protonen dicht genoeg op elkaar zijn, kan tunneling plaatsvinden.

Leg uit of kernfusie door tunneling makkelijker wordt gemaakt, of moeilijker.

25 Quantum Tunneling Composiet

Het Engelse bedrijf Peratech maakt Quantum Tunneling Composiet materiaal. Het bestaat uit heel veel heel kleine onregelmatige metaalkorrels (zie figuur 3.12), vermengd met isolerend materiaal. Het composietmateriaal als geheel is isolerend, maar als je er op drukt neemt de weerstand snel af (zie

figuur 3.13). Daardoor zijn er veel toepassingen mogelijk, bijvoorbeeld in een soort touch screen, ingebouwd in kleding (figuur 3.14).



Figuur 3.13 Weerstand als functie van de drukkracht



Figuur 3.14 Toepassing van Quantum Tunneling Composiet

Het materiaal heet Quantum Tunneling Composiet omdat de geleiding plaatsvindt doordat elektronen van metaalkorreltje naar metaalkorreltje tunnelen, door het isolerende tussenlaagje heen.

Hoe snel quantumdeeltjes door een barrière heen tunnelen, hangt van drie grootheden af.

a. Noem die drie grootheden.
b. Geef een verklaring voor het afnemen van de weerstand bij grotere drukkracht.

Ook halfgeleiders zijn eigenlijk isolerend, en zo te beïnvloeden dat ze geleidend worden. Bij een hogere temperatuur geleiden halfgeleiders beter, doordat sterkere thermische fluctuaties extra elektronen over een barrière heen helpen, zodat ze gaan bijdragen aan de geleiding.

c. Leg uit dat als de geleiding in het materiaal van de firma Peratech echt door tunneling plaatsvindt, je verwacht dat de weerstand *niet* afhangt van de temperatuur, als er verder niets verandert.

Het blijkt dat de weerstand toch een beetje verandert als de temperatuur stijgt. Anders dan bij halfgeleiders neemt de weerstand toe. Dit komt niet doordat de weerstand van de metaalkorreltjes verandert, het komt doordat er iets aan het tunnelen verandert.

d. Leg uit wat er aan het tunnelen verandert als de temperatuur toeneemt.

26 EXTRA Geld uit de kluis?

"Ik heb dit geld niet uit de kluis gestolen, het is vanzelf door de kluisdeur naar buiten getunneld."

Leg aan de hand van de formule $T = e^{-2d\sqrt{(4\pi m/h^2)(V-E)}}$ uit dat dit wel erg onwaarschijnlijk is.

27 Snelheidscontrole

"U heeft in de Sarphatistraat 59 km/h gereden, daar krijgt u een bekeuring voor." "Maar agent, als u wist waar ik was, dan kunt u mijn snelheid helemaal niet bepalen, kent u de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg niet?"

a. Schat dat de straat ongeveer een kilometer lang is. Zoals de agent het zegt legt hij de positie dus vast met een onbepaaldheid van een kilometer.

b. Schat de orde van grootte in de onbepaaldheid in de snelheid door te rekenen met de onbepaaldheidsrelatie. Ontloopt de automobilist zijn boete?
c. Bereken de onbepaaldheid in de snelheid als de positie van de auto tot op één nanometer nauwkeurig is vastgelegd.

Nu krijgt een elektron een boete voor te snel bewegen in de Sarphatistraat.
d. Bereken de onbepaaldheid in de snelheid als de positie van het elektron tot op één kilometer nauwkeurig is vastgelegd.
e. Bereken de onbepaaldheid in de snelheid als de positie van het elektron tot op één nanometer nauwkeurig is vastgelegd.
f. Trek een conclusie over het belang van de onbepaaldheidsrelatie voor voorwerpen van verschillende afmetingen.

28 Waarom een atoom niet instort

Als je naar het proton en het elektron in een waterstofatoom kijkt alsof het kleine balletjes zijn, dan zou je denken dat de laagst mogelijke energie optreedt als het elektron stil op het oppervlak van de kern ligt. Dan zou de kinetische energie nul zijn, en de tegengestelde ladingen zouden zo dicht mogelijk bij elkaar zijn.

Leg uit dat de onbepaaldheidsrelatie laat zien dat deze toestand onmogelijk kan bestaan.

29 Quantumcriteria

We hebben tot nu toe verschillende quantumverschijnselen gezien: materiedeeltjes vertonen interferentie op de schaal van de de broglie-golflengte, licht bestaat uit fotonen, alles voldoet aan de onbepaaldheidsrelatie, en er is een kans op tunneling.
a. Leg voor elk van die verschijnselen uit wat er verandert als je een kleiner, lichter deeltje bekijkt.
b. Leg voor elk van de verschijnselen aan de hand van de formules uit dat ze minder goed merkbaar zouden zijn als de constante van Planck een nog kleinere waarde zou hebben.

4 Quantisatie en spectra

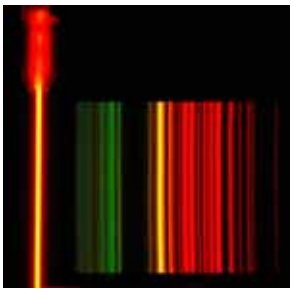
Hoofdstukvraag	Waarom zijn energieën in atomen en vaste stoffen gequantiseerd?



Figuur 4.1 Mars Rover



Figuur 4.2 Steepjescode



Figuur 4.3 Emissiespectrum van neon

In 1967 werd een sonde naar de maan gestuurd. Deze bracht geen maanstenen terug, dat gebeurde pas bij de bemande Apollovluchten. Toch kon worden onderzocht wat de samenstelling van de bodem van de maan is. De Mars Rover gebruikte in 2007 dezelfde techniek voor de marsbodem: een α-straler bestraalt een rots, die zendt vervolgens röntgenstraling uit. Door precies te meten wat de frequenties daarvan zijn, kan ter plaatse worden bepaald welke elementen voorkomen in de rots.

In de module *Elektromagnetische straling en materie: Zon en Sterren* staat beschreven hoe de samenstelling van een steratmosfeer kan worden bepaald uit de precieze frequenties zichtbaar licht die de ster uitzendt. De spectra van de verschillende atomen vormen een patroon van lijntjes, dat net als een streepjescode bij producten in een winkel, voldoende informatie bevat om stoffen te onderscheiden.

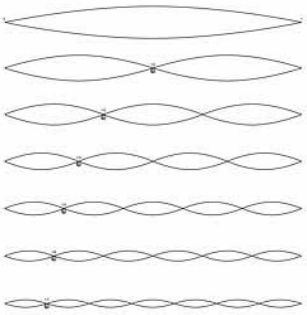
De golfeigenschappen van elektronen zijn hierbij cruciaal. Het blijkt dat er slechts enkele mogelijkheden zijn van staande golven die kunnen bestaan in een kleine ruimte. Dit leidt ertoe dat een elektron binnen een atoom maar een beperkt aantal mogelijke energieën kan hebben. De energie wordt daardoor geabsorbeerd en uitgezonden in afgepaste hoeveelheden, de quanta waar de quantumwereld zijn naam aan dankt, overeenkomend met de lijntjes in de spectra.

In dit hoofdstuk zullen we zien dat ook eigenschappen van vaste stoffen zijn te verklaren uit het gedrag van elektronen die zijn opgesloten in een beperkte ruimte, in combinatie met het bestaan van fotonen. Metalen geleiden elektrische stroom. Isolatoren niet. Halfgeleiders eigenlijk ook niet, maar die kun je geleidend maken door er licht op te schijnen, ze te verwarmen, of door kleine hoeveelheden van andere stoffen toe te voegen. Daardoor kun je hun gedrag manipuleren, dit is de basis van de hele elektronica-industrie.

Het model dat we gaan opstellen voor het gedrag van elektronen is een versimpeling van de werkelijkheid, maar we zullen zien dat een aantal van de waargenomen eigenschappen correct uit het model volgt.



Figuur 4.4 Een grote gong klinkt laag



Figuur 4.5 Grondtoon en boventonen van een snaar

4.1 Quantumdeeltje in een doosje

Opgesloten golven

Je weet dat in een klein muziekinstrument golven met hoge frequenties kunnen bestaan, en in een groot instrument golven met lage frequenties. In de snaar van een contrabas ontstaan lagere tonen dan in de snaar van een viool. Een grote klok klinkt lager dan een kleine, een altfluit lager dan een blokfluit.

Dit komt doordat vastligt wat de golflengte kan zijn. Bij een snaarinstrument kunnen de uiteinden van een snaar niet bewegen. Daardoor zijn alleen de staande-golfpatronenpatronen mogelijk die je in figuur 4.5 ziet. De bovenste mogelijkheid is de grondtoon, daarbij past een halve golflengte op de snaar. Er geldt $\lambda=2L$. Daaronder staan de boventonen, met $\lambda=L$, $\lambda=2/3\ L$, enzovoort. De frequenties volgen uit $f=v/\lambda$, met v de golfsnelheid. Voor de boventonen is de golflengte kleiner en de frequentie hoger. Je ziet twee dingen: Niet alle golflengtes en frequenties zijn mogelijk, slechts veelvouden van de grondtoon kunnen bestaan. En bij een grotere afmeting L horen grotere λ's en kleinere f's.

De mogelijke energieën van een elektron in een atoom worden op analoge manier bepaald als de boventonen van een muziekinstrument. Het gaat erom welke golven passen bij de beschikbare ruimte. Kenmerkend voor de elektronen in een atoom is dat ze te weinig energie hebben om aan de aantrekkingskracht van de kern te ontsnappen. Vrijwel alle waarneembare eigenschappen van atomen komen eruit voort dat de elektronen zich in deze beperkte ruimte als golf gedragen. In het atoom gaat het om de golf die samenhangt met de kansverdeling van de plaatsen waar het elektron wordt waargenomen. Bij elke mogelijke golf hoort een mogelijke energie.

Valkuil

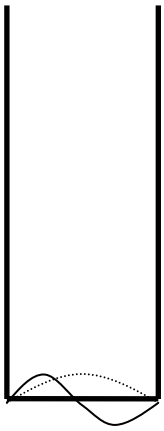
Het is belangrijk om te zien dat het slechts om een analogie gaat. Bij muziekinstrumenten worden door de afmetingen de frequenties vastgelegd, dus de tonen die je hoort. De energie ligt daarmee helemaal niet vast, je kunt een snaar harder of zachter aanslaan, dat hangt in dit geval helemaal niet samen met de frequentie. In het geval van een quantumdeeltje komen de mogelijke golfpatronen die passen bij de ruimte, anders dan in het geval van geluid, direct overeen met mogelijke energieën.

We gaan niet in detail afleiden welke energieën een elektron in een atoom kan hebben. (Zie daarvoor de module *Elektromagnetische straling en materie*.) We gaan wel kijken hoe de energieniveaus afhangen van de afmetingen van de ruimte. We zullen het eerst hebben over het simpelste geval, namelijk met maar één elektron dat in een beperkte ruimte is ingesloten. Dat is van toepassing op een waterstofatoom. Later volgen atomen met meerdere elektronen.

De energieën van een elektron in een ééndimensionaal doosje

Als je een deeltje met golfeigenschappen opsluit in een doosje, waarbij er geen krachten werken binnen het doosje, maar oneindige krachten bij de wanden, dan blijft het deeltje zeker binnen het doosje. Er is geen tunneling; we zagen al dat dat niet kan bij een oneindig hoge barrière. Aan de rand van de doos moet de golf dus naar nul gaan, dan komt hij niet buiten de doos en klopt het dat er geen kans is het deeltje buiten de doos aan te treffen.

Hoewel elk atoom driedimensionaal is, doen we net alsof we een elektron hebben dat in één richting zit ingesloten. Veel van wat we zullen vinden voor deze ééndimensionale doosjes blijkt ook te kloppen voor driedimensionale doosjes.



Figuur 4.6 Golfjes die in een doosje passen

De eerste mogelijke oplossing is dat een halve golflengte past op de breedte van de doos. De situatie is met een stippellijn getekend in figuur 4.6. De breedte van de doos noemen we a. De eerste oplossing komt overeen met de laagste energie, het is de **grondtoestand** van het systeem. De de broglie-golflengte is dan gelijk aan $2a$:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = 2a$$

Deze grondtoestand is heel anders dan wanneer het deeltje geen golfeigenschappen zou hebben:

- Ten eerste volgt uit het bovenstaande verband dat het quantumdeeltje altijd een gemiddelde snelheid heeft die groter is dan nul. Hoe kleiner het doosje, hoe groter de gemiddelde snelheid. De Broglies verband tussen de golflengte en de snelheid $\lambda=h/(m\cdot v)$ kunnen we namelijk ook omdraaien:

$$v=\frac{h}{m\cdot\lambda}=\frac{h}{2ma}$$

  Het deeltje heeft dus altijd een kinetische energie, ook als de temperatuur nul kelvin is. Dit heet de **nulpuntsenergie**. De waarde van de laagst mogelijke energie is groter als het doosje kleiner is:

$$E_{\text{kin}}=\tfrac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{h^2}{8\cdot m\cdot a^2}$$

- Ten tweede is opmerkelijk dat de kans om het deeltje aan te treffen niet overal binnen de doos even groot is. Zonder golfeigenschappen zou het deeltje stilliggen op een willekeurige plaats in de doos. Rekening houdend met golfeigenschappen krijg je een oplossing die nul is aan de rand en het grootst in het midden. De interpretatie die de quantumtheorie hieraan geeft is dat de **kans** om het deeltje bij een meting in het midden aan te treffen het grootst is.

Kans

De kans om een deeltje ergens aan te treffen is evenredig met het kwadraat van de amplitude van de golf op die plaats. Bij de eerste aangeslagen toestand (de hele golf in figuur 4.6) zijn er twee maxima, elk op ¼ *a* van een van beide wanden.

Er zijn meer mogelijke oplossingen. De tweede mogelijkheid is ook getekend in figuur 4.6: een hele golflengte past in de doos. De golflengte is dus twee keer zo klein als die van de grondtoestand. De gemiddelde snelheid is dan twee keer zo groot, en de kinetische energie, die evenredig is met v^2, vier keer zo groot. De daarop volgende energie is negen keer zo groot als die van de grondtoestand, en dat gaat verder met 16 keer en 25 keer.

Deeltje in een doos

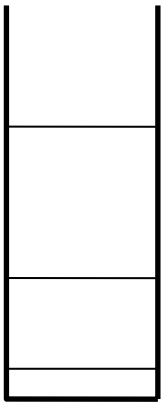
Golflengtes die een geheel aantal malen de minimumgolflengte zijn, passen in de eendimensionale doos:

$$\lambda_n=\frac{2a}{n}\text{, met } n=1,2,3,\ldots.$$

Andere golven gaan niet naar nul op de rand en kunnen niet bestaan. Zo is er een beperkt aantal mogelijke energieën die een deeltje in een doos kan hebben. Met $v=h/(m\cdot\lambda)$ en $E_{\text{kin}}=1/2\cdot m\cdot v^2$ vind je als mogelijke energieën:

$$E_n=\frac{h^2\cdot n^2}{8\cdot m\cdot a^2}$$

Symbolen: E_n is de energie van het deeltje in toestand n in Joule (J), a is de breedte van de doos in meters (m), $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Js is de constante van Planck, m is de massa van het deeltje in kilogram (kg), n is de toestand van het systeem met $n=1$ de grondtoestand.



Figuur 4.7 Energieën in een doos

De mogelijke energieën zijn geschetst in figuur 4.7. Als je wilt weten welke fotonen dit systeem zou kunnen absorberen, dan moet je kijken naar de *verschillen* tussen deze energieën. Als het systeem zich in de grondtoestand ($n=1$) bevindt, dan kan het een foton met energie $E=E_2-E_1$ absorberen. Daarmee krijgt het elektron een nieuwe energie E_2, dat is de volgende moge-

lijke waarde die het kan hebben, overeenkomend met de eerste aangeslagen toestand.

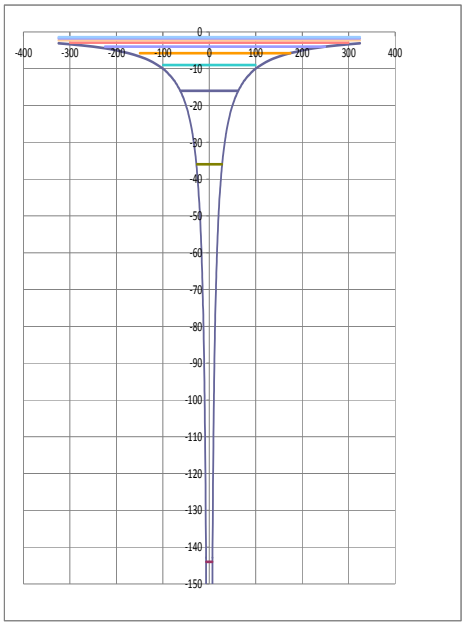
Het foton is dan weg, en het elektron in het doosje is naar de toestand met hogere energie gegaan. In totaal wordt dan aan de wet van behoud van energie voldaan. De energie van het foton komt via

$$E = h \cdot f$$

overeen met de frequentie van het licht dat kan worden geabsorbeerd.

Ook absorptie van $E=E_3-E_1$ is mogelijk, en $E=E_4-E_1$. De verschillen in energie tussen de niveaus bepalen dus welke kleuren licht het systeem kan absorberen.

Als het systeem in een **aangeslagen toestand** is ($n>1$), zal het na korte tijd weer terugvallen naar de grondtoestand. Daarbij wordt het energieverschil als een foton uitgezonden. Dat foton ontstaat op dat moment. De energie van het foton is weer gelijk aan het energieverschil tussen de aangeslagen toestand en de grondtoestand. Zo bepalen de energieverschillen tussen de niveaus niet alleen het absorptiespectrum maar ook het emissiespectrum, dus de kleuren die een systeem uitzendt.



Figuur 4.8 De energieniveaus van het elektron in een waterstofatoom

Wat klopt hiervan met de werkelijkheid, en wat niet?

In figuur 4.8 zie je de echte energieniveaus van het elektron in een waterstofatoom, zoals die volgen uit metingen van het absorptie- en emissiespectrum. Enkele eigenschappen van het spectrum van het elektron in het ééndimensionale doosje, dat is geschetst in figuur *4.7,* kloppen hiermee, andere eigenschappen niet.

Correcte voorspellingen van het model zijn:

- Dat er een beperkt aantal mogelijke energieniveaus is.
- De orde van grootte van de energieverschillen tussen de niveaus (Dit reken je na in onderstaande Onderzoeksopdracht).

De belangrijkste *incorrecte* voorspelling is:

- Het model van het deeltje in een doosje zegt dat de energieën steeds verder uit elkaar liggen, hoe hoger je komt. In wekelijkheid is dat andersom; zie extra paragraaf 4.2.

Onderzoeksopdracht

De laagste toestand is de toestand met $n=1$, de aangeslagen toestanden hebben hogere waarden van n.

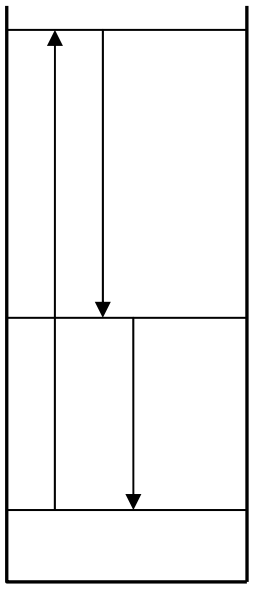
a. In de grondtoestand heeft het deeltje een energie die ongelijk is aan nul. Energie nul is niet mogelijk. Leg uit hoe dit voor een opgesloten deeltje ook uit de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg volgt.

b. Ga aan de hand van de formule voor de energieniveaus van een deeltje in een doosje na dat hogere niveaus steeds verder uit elkaar liggen.

c. Bereken de energie van een foton dat kan zorgen voor een overgang van $n=1$ naar $n=2$, voor een doosje zo groot als een waterstofatoom, waarbij je als massa van het opgesloten deeltje de massa van een elektron neemt.

d. Klopt de orde van grootte van je antwoord van vraag c) met de waarneming dat atomen, ook waterstofatomen, fotonen van zichtbaar licht en van UV-straling kunnen absorberen en uitzenden?

Uitgewerkte voorbeeldopgave



Figuur 4.9 Energieniveaus en overgangen

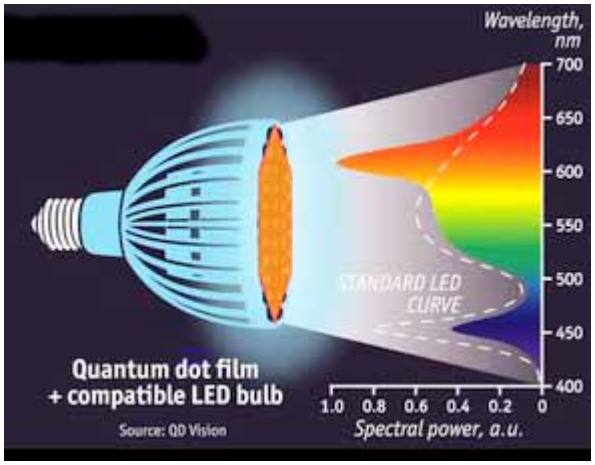
Mooier licht met Quantum Dots

Het Amerikaanse bedrijf QD Vision maakt een product dat het licht van een LED-lamp meer laat lijken op het licht van een gloeilamp. Dat ervaren mensen als prettiger, en het geheel is net zo energiezuinig als een LED-lamp. Het product is een plaatje met quantumdots, dat voor een LED-lamp wordt geplaatst. We bekijken in een eenvoudig model de manier waarop quantumdots het licht beïnvloeden.

Een quantumdot is een klein stukje geleidend materiaal op een isolerende achtergrond. Veel van de eigenschappen kun je beschrijven met het model van een elektron dat is opgesloten in een doosje. In figuur *4.9* zie je schematisch de energieniveaus van een elektron in een ééndimensionale quantumdot (die is in een richting heel smal en in de andere richting langer).

De witte stippellijn in figuur *4.10* geeft aan hoeveel licht van elke golflengte in gewoon LED-licht zit. De hoeveelheid blauw licht is te groot, in natuurlijk licht zit minder blauw en meer rood. Een quantumdot moet blauw licht absorberen en het licht bij grotere golflengtes weer uitzenden.

We bekijken of het volgende scenario kan kloppen: De absorptie van blauw licht komt overeen met een overgang van de grondtoestand naar de tweede aangeslagen toestand, waarna de energie als twéé fotonen weer wordt uitgezonden: één horend bij de overgang van de tweede aangeslagen toestand naar de eerste aangeslagen toestand, en één foton horend bij de overgang van de eerste aangeslagen toestand naar de grondtoestand.



Figuur 4.10 Spectrum van een LED-lamp met en zonder quantum dots

a. Leg uit dat het uitgezonden licht dan inderdaad is opgeschoven naar de rode kant van het spectrum. Doe dit zonder berekening, maar geef wel de formule die van belang is.
b. Bereken de lengte L van een ééndimensionale quantumdot die blauw licht met golflengte 450 nm absorbeert bij zijn overgang van de grondtoestand naar de tweede aangeslagen toestand.
c. Laat met een berekening zien dat de twee uitgezonden fotonen allebei *niet* overeenkomen met de rode piek in het spectrum van figuur *4.10* (zodat het model verbeterd zou moeten worden om de werking van de quantumdots helemaal te verklaren).

Uitwerking

a. De energie van het oorspronkelijke foton wordt verdeeld over twee fotonen. Elk van de energieën van de nieuwe fotonen is kleiner dan het totaal. Met $E=h\cdot f$ zie je dat een kleinere fotonenergie overeenkomt met een kleinere frequentie. Dat is inderdaad een verschuiving naar de rode kant van het spectrum. (Als je liever in golflengtes denkt dan in frequenties kun je met $\lambda=c/f$ zien dat een kleinere frequentie overeenkomt met een grotere golflengte).

b. De mogelijke energieën van een quantumdeeltje in een ééndimensionale doos met lengte L worden gegeven door $E_n=n^2\cdot h^2/8mL^2$. De grondtoestand heeft $n=1$, de energie is

$$E_{\text{grond}} = h^2 / 8m \cdot L^2$$

De tweede aangeslagen toestand heeft $n=3$, de energie is

$$E_{\text{2de aangeslagen}} = 9h^2 / 8m \cdot L^2$$

Het *verschil* in energie is g*elijk aan* de energie van het gea*bsorbeer*de foton. Dus geldt

$$\frac{h^2}{m \cdot L^2} = h \cdot f = \frac{hc}{\lambda_{\text{licht}}}$$

Als je één factor h wegstreept en grootheden naar de andere kant brengt, krijg je

$$L^2 = \frac{h \cdot \lambda_{\text{licht}}}{mc} = \frac{6{,}6\cdot10^{-34}\cdot4{,}5\cdot10^{-7}}{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot3{,}0\cdot10^{8}} = 1{,}1\cdot10^{-18}$$

dus $L=1{,}0\cdot10^{-9}$ m.

c. De drie energieniveaus die een rol spelen hebben energie $h^2/8mL^2$, $4h^2/8mL^2$ en $9h^2/8mL^2$. De verschillen zijn $5h^2/8mL^2$ voor de overgang van de tweede aangeslagen toestand naar de eerste aangeslagen toestand en $3h^2/8mL^2$ voor de overgang van de eerste aangeslagen toestand naar de grondtoestand. De twee fotonen hebben dus respectievelijk 5/8 en 3/8 van het totale energieverschil. De frequenties die daar bij horen zijn 5/8 respectievelijk 3/8 maal zo groot als de oorspronkelijk geabsorbeerde frequentie, en met $\lambda_{\text{licht}}=c/f$ vind je dat de twee uitgezonden golflengtes 8/5 respectievelijk 8/3 maal de oorspronkelijk geabsorbeerde golflengte zijn. De waarden die je krijgt zijn 720 nm en 1200 nm. Die waarden liggen verder naar boven in het spectrum van figuur *4.10* dan de rode piek. Ze liggen zelfs in het infrarood, zodat de lichtopbrengst laag zou zijn. (Je zou dus een verbeterd model moeten opstellen, met andere overgangen, of een model waarin de het doosje niet eendimensionaal is).

4.2 EXTRA Beter model voor een waterstofatoom

Andere wanden

Vroeger hadden zwembaden rechte wanden. Golven die daar tegenaan kwamen, weerkaatsten. Het water klotste enorm door al die door elkaar lopende golven. Nu is er vaak een soort overloop, waarop de golven uitdempen. Dat vinden de zwemmers prettiger. De manier waarop aan de randen de ruimte waarin iets kan golven wordt ingeperkt, maakt dus uit.

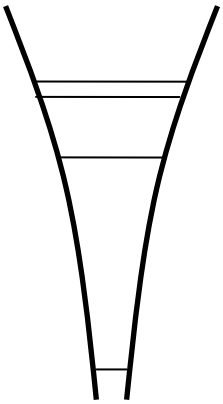
Bij snaarinstrumenten zitten beide uiteinden van de snaar vast, dat zijn punten waar de snaar niet kan bewegen. Bij een orgelpijp kan de lucht aan één uiteinde juist wel bewegen. Dit verschil heeft tot gevolg dat bij een snaar de boventonen alle gehele veelvouden van de grondtoon zijn, bij een grondtoon van 400 Hz dus 800 Hz, 1200 Hz, 1600 Hz, 2000 Hz, 2400 Hz, 2800 Hz,....

Bij de orgelpijp zijn het alleen de oneven veelvouden: 1200 Hz, 2000 Hz, 2800 Hz,.... Wat er aan de randen precies gebeurt, maakt dus weer uit voor de golven die kunnen bestaan. Dit zullen we terugzien bij ingesloten quantumdeeltjes.

Het model van een deeltje in een doos klopt met het feit dat de energie van een waterstofatoom slechts bepaalde waarden kan aannemen. Wat dat betreft is het model van het doosje goed genoeg om iets over spectra van atomen te zeggen. Het klopt echter helemaal niet dat de hogere energieën steeds verder uit elkaar liggen. Ze liggen juist steeds dichter bij elkaar. We gaan proberen een gevoel te krijgen voor wat er gebeurt als je een deeltje op een andere manier probeert in te sluiten dan in een simpele doos.

Het atoommodel

In figuur 4.8, de figuur waarin de werkelijk gemeten energieniveaus van waterstof staan, is een put getekend waarvan de wanden steeds minder steil oplopen als je verder uit het midden gaat. Deze put is getekend in figuur 4.11. De eerste oplossing is weer een halve golf. De tweede oplossing heeft twee halve golven in de beperkte ruimte, in plaats van één halve golf. De golflengte is kleiner dan die van de grondtoestand. Maar als je de schets in figuur *4.11* bekijkt, dan zie je dat bij hogere energie het deeltje meer ruimte tot zijn beschikking heeft. Hoger in de put is de put breder (dat was niet zo bij de doos). Je kunt dat vergelijken met een kind dat harder schommelt in de speeltuin: de beweging neemt meer ruimte in dan als het kind zachtjes schommelt.



Figuur 4.11 Aangetrokken met kracht $1/r^2$

De golflengte van een hogere toestand is dus wel kleiner dan die van een lagere toestand, maar minder veel kleiner dan in het geval van de doos. Een volgende mogelijke energie is dus wel hoger dan de vorige mogelijke energie, maar minder veel hoger dan je zou hebben in het geval van de doos. De energieën van een elektron in een waterstofatoom komen in werkelijkheid dichter op elkaar, hoe hoger je komt.

Dat klopt met het soort kracht dat werkt. De elektrische aantrekkingskracht tussen en kern en een elektron is van deze vorm:

Elektrische aantrekkingskracht

$$F_{el} = -k \frac{e^2}{r^2}$$

Symbolen: F_{el} is de elektrische kracht tussen twee ladingen in Newton (N), e is de elementaire lading in Coulomb, constante $k = 8{,}99 \cdot 10^9\ Nm^2C^{-2}$, r is de afstand tussen de ladingen in meters (m).

Een elektron heeft lading $-e$, een proton heeft lading $+e$. De constante k geeft aan hoe sterk twee ladingen elkaar aantrekken. De kracht trekt het elektron naar de kern, de kracht wordt kleiner als de afstand groter wordt volgens $F \sim 1/r^2$, de kracht wordt vier keer zo klein als de afstand twee keer zo groot wordt. Dit patroon is geschetst in figuur 4.11.

Wat de elektrische energie betreft zou het elektron de laagste waarde bereiken door op de kern te liggen, maar de onbepaaldheidrelatie van Heisenberg zegt al dat het niet mogelijk is een deeltje op één precieze plaats met snelheid nul te hebben. Hoe dichter het deeltje bij de kern blijft, hoe kleiner dus Δx is, hoe groter volgens de onbepaaldheidrelatie de onbepaaldheid in de snelheid

is. De gemiddeld waargenomen snelheid is dan groot. De kinetische energie is dus ook groter. Het deeltje zoekt een compromis tussen dicht bij de aantrekkende kern zijn aan de ene kant, en niet in een beperkte ruimte willen zijn aan de andere kant.

De echte waardes voor de energieën leiden we niet af, dat is gedaan in de module *Elektromagnetische straling en materie*. Hier gebruiken we alleen het resultaat.

Energieniveaus waterstofatoom

De energieën die bij de elektrische aantrekkingskracht in een waterstofatoom horen, zijn:

$$E_n = -2\pi^2 \cdot k^2 \cdot \frac{m \cdot e^4}{h^2 \cdot n^2}$$

Symbolen: E_n is de energie van het deeltje in toestand n in Joule (J), m is de massa van het elektron in kilogram (kg), $\pi = 3{,}14159\ldots$, constante $k = 8{,}99 \cdot 10^9\ Nm^2C^{-2}$, e is de elementaire lading in Coulomb en $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js is de constante van Planck.

In dit geval rekenen we de energie van een elektron dat aan de bovenkant van de put zit, waar de wanden uiteindelijk horizontaal gaan lopen, als energie nul. De lagere energieën hebben dus een negatieve waarde.

Onderzoeksopdracht

a. Welke n heeft in dit derde geval de laagste energie?
b. Ga na dat hogere niveaus steeds dichter bij elkaar liggen.
c. Bereken de energie van de overgang van $n=1$ naar $n=2$.
d. Leg uit hoe deze energie herkenbaar is in het spectrum van waterstof.
e. Als je van de grondtoestand naar steeds hoger aangeslagen toestanden gaat, wat kun je dan zeggen van de energie van de bijbehorende fotonen?

Toepassing: Optische neus

Hoe werkt de optische neus? De techniek is gebaseerd op het gegeven dat moleculen kleuren kunnen absorberen door middel van trilling. Elke moleculensoort absorbeert weer een andere karakteristieke set kleuren. Dat noemen we moleculaire vingerafdrukken. En elk van de honderdduizenden verschillende moleculen heeft zijn eigen onmisbare optische vingerafdruk. Het absorberen van kleuren vertelt ons met welk moleculenpakketje (met welke gasvormige stof) we te maken hebben.

De kunst is nu om met een soort laserpistool zoveel mogelijk infrarode kleuren door de moleculen te schieten. Een detectieapparaat legt vervolgens vast welke kleuren zijn geabsorbeerd. Zo weten we dus om welke moleculen het gaat, kortom: met welke stof we hier van doen hebben (bijvoorbeeld methaan of CO2). Dit moet snel en nauwkeurig gebeuren. Wetenschappers van de Universiteit Twente hebben een apparaat ontwikkeld dat in 1 seconde ongeveer 1 miljoen kleuren door moleculen schiet. En daarmee is de optische neus een feit.

4.3 Systemen met meerdere elektronen



Figuur 4.12 De wereld zou saai zijn zonder Pauli



Figuur 4.13 Wolfgang Pauli op een postzegel

Atomen met meerdere elektronen

Voor het begrijpen waarom de atomen van de verschillende elementen zich zo verschillend gedragen, ontbreekt nog een schakel in de redenering. Als je namelijk de toestanden uitrekent waarin elektronen zich in een helium-, lithium-, koolstof-, zuurstof-, ijzer-, of willekeurig welk ander atoom zouden kunnen bevinden, dan lijken die toestanden erg op de toestanden in een waterstofatoom. Doordat de kernen meer protonen hebben, is de aantrekkingskracht sterker, de put is dieper. Het patroon van energieën is hetzelfde als in figuur 4.8, alleen uitgerekt: de energieniveaus hebben een extra factor Z^2, met Z het atoomnummer, dat gelijk is aan het aantal protonen in de kern. De energieën worden dus

$$E_n = -2\pi^2 \cdot k^2 \cdot \frac{m \cdot e^4}{h^2 n^2} \cdot Z^2$$

Als alle elektronen in alle atomen in de toestand met de laagste energie, de grondtoestand, zouden kunnen gaan zitten, dan zou het heelal er heel saai uitzien. Er zouden niet allerlei verschillende moleculen, van water tot DNA, kunnen ontstaan, maar alles zou bestaan uit bolvormige atomen. De personen op de foto in figuur 4.12 zouden er uitzien als de twee stipjes die er onder staan.

De natuurkundige Wolfgang Pauli formuleerde het principe dat er voor zorgt dat dit niet het geval is: T*wee elektronen kunnen niet in precies dezelfde quantumtoestand zitten*. Dit staat bekend als het **uitsluitingsprincipe** van Pauli.

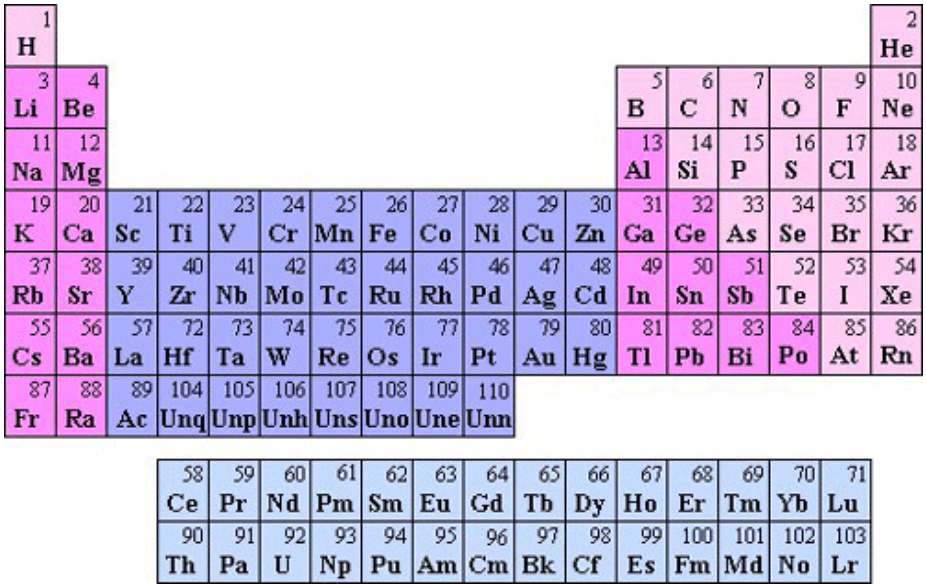
In de toestand met de laagste energie kunnen *twee* elektronen zitten. Dat het er twee zijn en niet één, komt doordat elektronen nog een eigenschap hebben, de spintoestand, waarvoor twee mogelijkheden zijn, die 'op' en 'neer' worden genoemd. Je kunt je het elektron voorstellen als een tol die linksom of rechtsom kan tollen. In de laagste-energietoestand kan één elektron zitten met spin 'op', en één met spin 'neer'. Dan hebben ze inderdaad niet precies dezelfde quantumtoestand, want de spin is verschillend. Daarom is niet alleen bij waterstof, maar ook bij helium, het element met twee elektronen per atoom, slechts de toestand met de laagste energie bezet. Bij helium is die toestand dubbel bezet, met twee elektronen met verschillende spinrichting.

Als het derde elektron er bij komt, bij het atoom van het element lithium, moet het naar een toestand met hogere energie, $n=2$. Bij die hogere energie heeft het elektron behalve spin 'op' of spin 'neer' ook de keuze uit de toestand die langs de x, de y, of de z-as is gericht, of een bolvormige toestand. In totaal zijn er acht combinaties. Acht elektronen kunnen de energie van het tweede niveau hebben. Tot aan neon wordt de 'schil' met deze energie gevuld. Al deze elektronen hebben binnen hun atoom dezelfde energie, de tweede mogelijke energiewaarde.

Zo worden steeds hogere niveaus gevuld. Als alle mogelijkheden bij één bepaalde energie vol zijn, komt het volgende elektron in een hogere energietoestand. Dit is de basis voor het periodiek systeem van de elementen.

Eigenschappen van de eerste twintig elementen

In figuur 4.14 zie je het periodiek systeem der elementen. Met de formule voor de energieniveaus en het Pauli-principe kunnen we veel eigenschappen van de elementen begrijpen.



Figuur 4.14 Periodiek systeem der elementen

- Atoomnummer 1: Een waterstofatoom heeft slechts één elektron. Dat zit normaal gesproken in de laagste energietoestand. Het kost een energie van 13,6 eV om dit elektron los te maken. Dit gaat redelijk gemakkelijk. Als het elektron loskomt, houd je een los proton over. Losse protonen in water vormen een zuur. Als waterstof reageert kan het één elektron afgeven.

- Atoomnummer 2: In een heliumatoom zitten twee elektronen. Omdat er twee mogelijkheden voor de spin zijn, kunnen die allebei in het laagste-energieniveau zitten. Doordat de kern sterker positief geladen is dan bij waterstof, is de energie van dit grondtoestandsniveau lager dan bij waterstof. De waarde van Z is groter. De elektronen zijn goed gebonden: het kost 24,6 eV om het eerste elektron los te maken en 54,4 eV om het tweede los te maken (dat laatste getal is vier keer zo groot als wat het bij waterstof kost, dit komt door de factor Z^2 in de energieniveaus).

  Het kost veel energie om een elektron los te maken. Het is ook ongunstig om er een elektron bij te doen, want dat zou naar het volgende energieniveau moeten. Helium geeft niet gemakkelijk een elektron af en neemt er niet gemakkelijk een op. Het reageert dus niet met andere stoffen.

- Atoomnummer 3 In een lithiumatoom moet het derde elektron naar het tweede energieniveau. Dat ligt een stuk hoger in energie. Het derde elektron is gemakkelijk los te krijgen: dat kost maar 5,39 eV. Dit element reageert gemakkelijk, doordat het gemakkelijk een elektron afgeeft. Vaak zie je als notatie ‘de elektronenverdeling is 2,1’. Dit betekent dat er twee elektronen in het eerste energieniveau zitten, en een in het tweede.

- Atoomnummers 4 tot en met 10: In de rest van de tweede rij van het periodiek systeem wordt het tweede niveau gevuld, in totaal kunnen er 8 elektronen in. Op zich is dit steeds hetzelfde niveau met steeds meer elektronen er in, maar door de steeds sterker positief geladen kern wordt de put steeds dieper. De energiewaarde van het tweede niveau wordt

steeds lager. Daardoor kost het geleidelijk meer moeite om een elektron los te maken. Bij Beryllium is dat 9,32 eV, bij Neon 21,57 eV.

Dit verklaart dat de plaats in de rij bepaalt hoe een element zich gedraagt in chemische reacties. Lithium geeft graag zijn derde, vrij los gebonden elektron af. Maar bij fluor, dat door de sterker geladen kern een lager gelegen tweede niveau heeft, is het juist heel gunstig een elektron op te nemen. Dat past nog in het tweede niveau, en de energie daarvan is laag. In een zout is fluor dan ook een negatief ion, in een scheikundige reactie neemt het graag een elektron op.

- Atoomnummers vanaf 11: Natrium moet aan een volgend niveau beginnen. Dat elfde elektron, dat in het derde niveau komt, is weer heel los gebonden. Het kost slechts 5,14 eV om het los te maken. Natrium is in een zout een positief ion, en geeft in een reactie een elektron af.

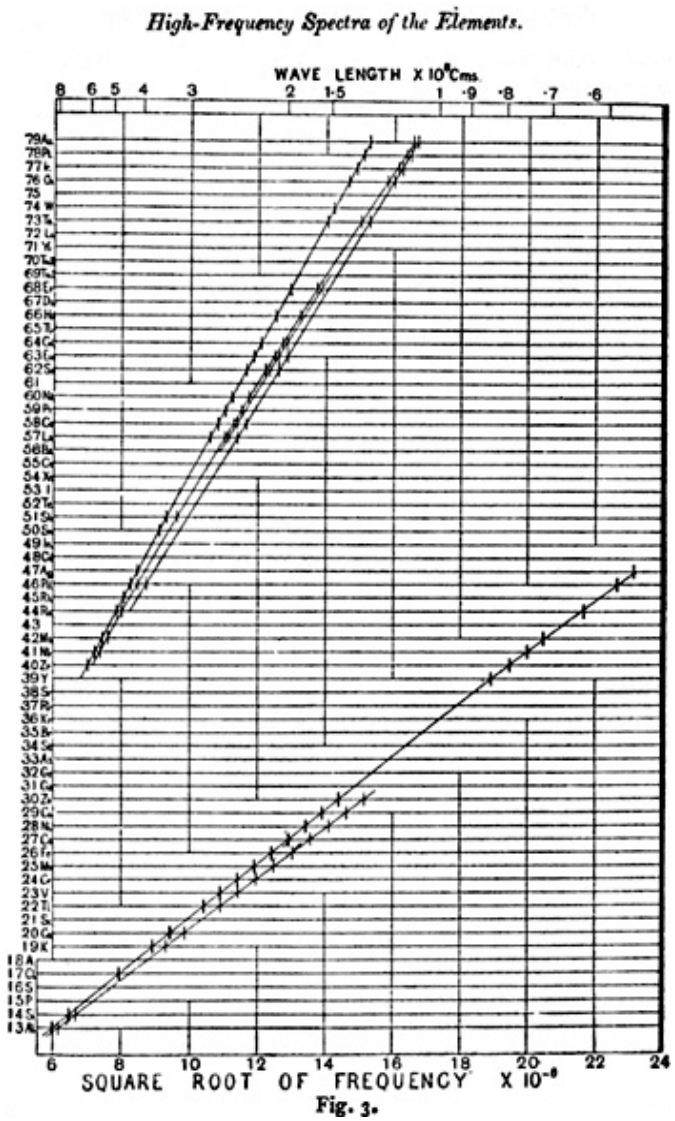
- We kunnen nu ook begrijpen dat de drie elementen die in de linkerkolom onder elkaar staan, waterstof, lithium en natrium, erg op elkaar lijken. Ze reageren alle drie heel gemakkelijk met andere stoffen. Ze hebben gemeenschappelijk dat ze alle drie één elektron in hun buitenste schil hebben. Voor waterstof is de buitenste schil ook de eerste schil, voor lithium is het de tweede schil, voor natrium de derde. Van de elektronen in de volle eerste en tweede schil merk je niet zoveel: als een ander atoom het natriumatoom nadert, krijgt het alleen te maken met het buitenste elektron. Zo'n buitenste elektron zit erg los, dat is de reden waarom deze drie elementen zo gemakkelijk reageren.

- Alle elementen in de rechterkolom hebben een volle buitenste schil. Het is ongunstig om een elektron op te nemen en ook om er een af te staan. Daardoor reageren ze niet gemakkelijk. Het zijn edelgassen.

Röntgenspectra van de elementen

Zoals besproken in de inleiding, is de samenstelling van de marsbodem onderzocht door de Mars Rover. De spectra die dit apparaat opneemt, kunnen worden begrepen met wat we weten over de energieniveaus. Er wordt een elektron weggeslagen uit het laagste niveau. Er valt een elektron uit het tweede niveau naar de opengevallen plaats. De energie die daar bij hoort komt overeen met fotonen in het röntgengebied.

Hoe hoger het atoomnummer, hoe dieper het eerste niveau ligt, en hoe groter het verschil in energie tussen het eerste en het tweede niveau. In figuur 4.15 zie je hoe de energie van de fotonen toeneemt als je zwaardere elementen hebt. Bij een bepaald element hoort een bepaalde energie, zo kan worden bepaald met welk element je te maken hebt.



Figuur 4.15 Meer energie per foton bij hoger atoomnummer

Moleculen

De hele scheikunde is een spel van elektronen. Als atomen bij elkaar in de buurt komen, zitten de kernen diep van binnen en maken alleen de elektronen contact. En dan is het de vraag wat er gebeurt. In sommige gevallen blijven de elektronen bij hun eigen atoom, soms worden bindingen gevormd, soms staat het ene atoom een elektron helemaal af aan het andere.

Wat er gebeurt bij de vorming van een molecuul is een samenspel van verschillende krachten en effecten: er zijn nu meerdere kernen die de elektronen aantrekken, de elektronen kunnen beschikken over een grotere ruimte (omdat een molecuul groter is dan een atoom), waardoor hun de broglie-golflengte groter kan zijn en waardoor dus hun kinetische energie kleiner kan zijn, er zijn afstotende krachten tussen de elektronen, en er is het Pauli-principe dat zegt dat twee elektronen niet in dezelfde toestand kunnen zitten.

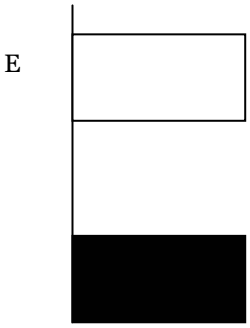
Voorspellen wat er precies gebeurt is ingewikkeld, maar er zijn wel algemene regels. Zo wil een atoom met één elektron in zijn buitenste schil graag reageren met een atoom waarvan de buitenste schil juist op één elektron na gevuld is.

Vaste stoffen

Een stuk steen, een brok ijzer of een stuk diamant kun je niet zomaar in elkaar persen. Deze stoffen zijn bestand tegen grote krachten. Deze stevigheid heeft te maken met de bindende, aantrekkende krachten tussen de atomen door de elektronen. Essentieel hierbij is het Pauli principe. Zonder Pauli principe zouden willekeurig veel elektronen dezelfde toestand delen. Nu echter treedt er afstoting op zodra de de Broglie golven van de elektronen beginnen te overlappen.

In een stukje vaste stof, zoals goud zitten heel veel elektronen. Ook in een korreltje zout en in een transistor in de processor van je computer, zitten heel veel elektronen bij elkaar. Hoewel de stukjes materiaal macroscopisch zijn, zijn dit toch quantumsystemen. De hoeveelheid beschikbare ruimte *per elektron* is namelijk ongeveer zo groot als een atoom, en dus is de de broglie-golflengte van de elektronen groot in verhouding tot de relevante afmetingen. We gaan bekijken wat er gebeurt als er heel veel quantumdeeltjes bij elkaar zitten.

In losse atomen of moleculen kunnen de elektronen alleen bepaalde energieën hebben. In het energieniveauschema wordt dit weergegeven door lijntjes. Dit leidt ook tot een lijnenspectrum voor de energieën en dus precieze frequenties voor de kleuren die geabsorbeerd of uitgezonden kunnen worden. Als je heel veel identieke losse goudatomen hebt, heb je heel veel keer hetzelfde energieniveau.



Figuur 4.16 Een volle en een lege band.

Als echter de atomen of moleculen dichter bij elkaar komen, gaan ze elkaar beïnvloeden. Dan wordt de energie van het ene atoom iets hoger, van de ander iets lager, en zo wordt het lijntje in het energieniveauschema een **energieband**. In figuur 4.16 hiernaast zie je twee van die banden.

Er is nog een andere manier om te begrijpen dat de mogelijke energieën banden vormen. Je begint dan met een elektron dat zich over het hele metaal mag uitspreiden. Dat geeft een heel lage kinetische energie, omdat de ruimte heel groot is. Bovendien kan de golf zich goed aanpassen aan de ionen van het metaal. Het is gunstig voor een elektron om daar gemiddeld dicht bij in de buurt te zitten. Vanwege het Pauli-principe moeten de volgende elektronen naar hogere niveaus. De beste niveaus passen goed bij de ionen, die zitten laag in energie. Maar er moeten ook toestanden gevuld worden die juist niet goed passen bij de ionen. Die zijn hoog in energie.

De eigenschappen van materialen wordt bepaald door deze 'bandenstructuur'. Hoe het materiaal zich gedraagt, hangt er van af welke banden vol zijn en welke leeg. De banden worden vanaf de laagste energie gevuld volgens het Pauli-principe: Er mogen niet twee elektronen in dezelfde toestand zitten. Als er een band vol is en de band met hogere energie is helemaal leeg, dan heb je een **isolator**. Dat is bijvoorbeeld in zout of in plastic het geval.

Net als een elektron in een atoom alleen energieën op de lijntjes kan hebben, kan een elektron in een vaste stof alleen energieën binnen de banden hebben. Het gebied tussen de banden wordt wel de '**kloof**', of de 'gap' genoemd. Als de kloof groot is, kan alleen een foton met veel energie een elektron uit de volle band naar de lege band brengen.

Als je een gedeeltelijk gevulde band hebt, is het *wel* mogelijk elektronen een *willekeurig klein beetje* meer energie te geven, bijvoorbeeld met een batterij. Er zijn dan namelijk lege toestanden vlak boven de gevulde toestanden, dus daar kan een elektron heen. Dan heb je een **geleider**. Bij metalen en bij grafiet is dat het geval.

Stoffen als silicium, germanium en andere **halfgeleiders** zitten tussen geleider en isolator in. Eigenlijk is er een volle band met een lege band daarboven, dus eigenlijk zijn deze materialen isolatoren. Maar de lege band ligt maar een *klein stukje* boven de volle. Als je de temperatuur verhoogt of licht op deze materialen schijnt, zijn er elektronen die genoeg energie krijgen om naar de bovenste band te gaan. Het materiaal gaat dan geleiden. De LDR (Light Dependent Resistor) en de NTC (stof met Negatieve Temperatuur Coëfficiënt, oftewel weerstand die kleiner wordt als de temperatuur stijgt) die in lichtsensoren respectievelijk temperatuursensoren worden gebruikt, zijn hierop gebaseerd.

Ook kleine toevoegingen van andere stoffen kunnen de geleiding beïnvloeden. De hele elektronica-industrie is hierop gebaseerd.

Begrippen

Nulpuntsenergie
Deeltje-in-een-doos
Pauli principe
Energieband
Isolator
Geleider
Halfgeleider

Samenvatting

- Een elektron in een kleine ruimte kan alleen bepaalde energieën hebben. De laagst mogelijke energie is niet gelijk aan nul. Dit noemt men de **nulpuntsenergie**.
- Hoe kleiner de ruimte, hoe hoger de energieën. Hoe de wanden van de kleine ruimte oplopen, bepaalt of de energieniveaus steeds verder uit elkaar lopen (**deeltje in een doos**), of steeds dichter op elkaar komen (**waterstofatoom**).
- De energiewaarden voor een elektron in een eendimensionale doos zijn

$$E_n = \frac{h^2 \cdot n^2}{8 \cdot m \cdot a^2}$$

- De discrete energieniveaus leiden tot discrete spectra; de **emissie- en absorptielijnen** die experimenteel worden waargenomen komen overeen met overgangen tussen energieniveaus.
- Meerdere elektronen die samen in een systeem zitten, voldoen aan het **Pauli-principe**: ze zitten niet in dezelfde quantumtoestand. Dit leidt tot de regelmatige patronen in het **periodiek systeem** van de elementen**.**
- In vaste stoffen verbreden de lijnen zich tot **energiebanden**.
- Als er een **energiekloof** is tussen een volle band en een geheel lege band daar boven, is de stof een **isolator**. Als er geen kloof is, dus als er een gedeeltelijk gevulde band is, is het systeem een **geleider**.
- **Halfgeleiders** hebben een kleine kloof. Er zijn manieren om deze materialen beter te laten geleiden, er worden dan elektronen over de kloof heen geholpen.

Opgaven

4.1

30 Piccolo en bombardon



Figuur 4.17 Midwinterhoorn

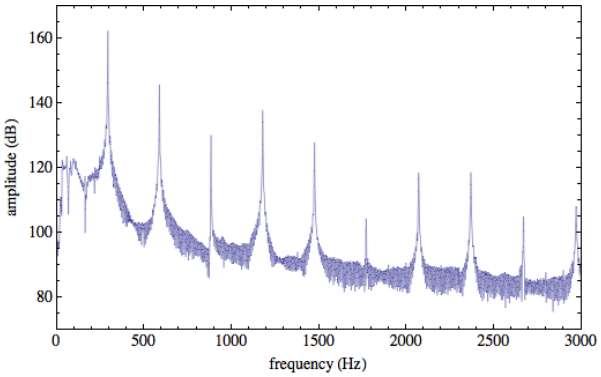
Geef zo veel mogelijk voorbeelden van het principe dat kleine instrumenten geluid met hoge frequenties maken, en grote instrumenten geluid met lage frequenties.

31 Snaar of blaas?

Bij een snaarinstrument zijn de frequenties van de boventonen alle gehele veelvouden van de grondtoon. Dit komt doordat beide uiteinden van de snaar vast zitten. Bij een blaasinstrument komen alleen de oneven veelvouden van de grondtoon voor als boventoon. Dit komt doordat de lucht aan één uiteinde niet kan bewegen, aan het andere uiteinde wel.

Is het spectrum dat je hieronder ziet van een snaarinstrument of van een blaasinstrument?

32 EXTRA Zwaar en langzaam



Figuur 4.18 Spectrum

Ook zonder de details te kennen kun je begrijpen dat elektronen in een atoom hogere trillingsfrequenties hebben dan atomen die trillen in een molecuul. De redenering gaat in stappen:

a. Als op verschillende massa's dezelfde kracht werkt, welke komt dan sneller in beweging of remt sneller af, de grote massa of de kleine massa? Licht je antwoord toe met één van de wetten van Newton.
b. Als je de afstand van de buitenste elektronen in een atoom tot de kern vergelijkt met de afstand tussen twee naburige atomen in een molecuul, is de ene afstand dan vele malen groter dan de andere, of is de orde van grootte hetzelfde?
c. In beide gevallen gaat het om een elektrische kracht. Wat kun je zeggen over de groottes van de krachten, als je het antwoord van vraag b) in gedachten houdt?

d. Welk deeltje zal sneller bewegen, het elektron ten opzichte van de kern of de atomen ten opzichte van elkaar? Licht je antwoord toe.

e. We hebben geprobeerd aannemelijk te maken dat één grootheid in de formule $T=2\pi\sqrt{(m/C)}$ in beide gevallen even groot is. Welke grootheid is dat?

f. Je kunt *niet* met een soortgelijke redenering aannemelijk maken dat de neutronen en protonen in de kern ten opzichte van elkaar langzamer trillen dan elektronen ten opzichte van de kern, omdat deze deeltjes zwaarder zijn dan elektronen. Op welke twee punten zou die redenering fout gaan?

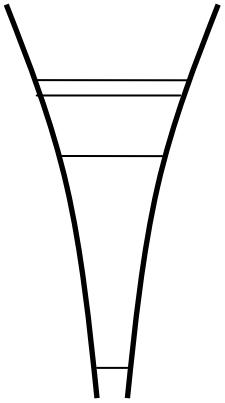
33 Kern of atoom, gammastraling of licht

Onafhankelijk van wat er precies gebeurt, kun je inzien dat uit een kern een ander soort straling zal komen dan uit een atoom. In een kern bewegen protonen en neutronen. De afmeting is van de orde van grootte 10^{-14} m. In een atoom bewegen elektronen, de afmeting is van de orde van grootte 10^{-10} m

a. Beredeneer dat de energieën binnen een kern groter zijn dan de energieën die te maken hebben met de elektronen in het atoom. Gebruik de formule voor de energieën van een deeltje in een ééndimensionale doos.

Als alle energieën groter zijn, dan zijn ook de verschillen tussen de energieën groter.

b. Klopt dat met wat je weet over de fotonen die bij kernreacties worden uitgezonden en over de fotonen die uit atomen komen?



Figuur 4.19 Energieën binnen een atoom



Figuur 4.20 Lasershow

34 Mars zwaar aangeslagen

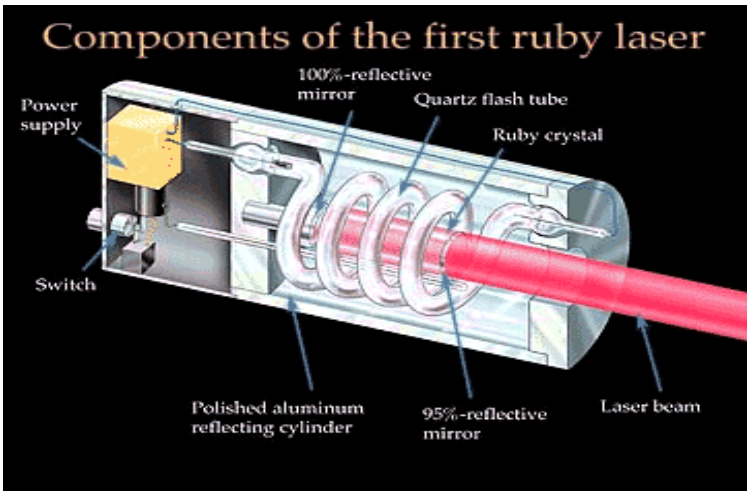
De Mars Rover zendt α-straling op een rots. Daardoor worden elektronen uit atomen in de rots weggeslagen. Andere elektronen maken een overgang naar het vrijgekomen energieniveau. Het energieverschil wordt uitgezonden als een röntgenfoton.

a. Leg aan de hand van figuur 4.19 uit of er een elektron uit het laagste niveau is weggeslagen, of uit een hoger niveau.

b. Leg uit hoe de frequentie van de röntgenstraling kan afhangen van welk element het is.

35 Is een laser een quantumsysteem?

Het principe van de laser berust op de eigenschap van atomen en moleculen met aangeslagen elektronen, die in een energierijkere toestand zitten dan normaal, om bij terugval naar de lager gelegen toestand een foton uit te zenden. Dit proces heet *spontane emissie*. Treft dit foton een elektron in een ander atoom of molecuul in dezelfde aangeslagen toestand, dan zal ook dit elektron terugvallen, onder uitzending van een foton dat dan 'in de pas loopt' met het eerste. Dit proces heet gestimuleerde emissie.
Behalve gestimuleerde emissie is er ook absorptie van licht door atomen in een laaggelegen toestand. Versterking treedt alleen op als er meer gestimuleerde emissie is dan absorptie, wat het geval is als er meer aangeslagen atomen zijn dan niet-aangeslagen atomen. Deze situatie heet populatie-inversie en voor de gewenste werking van een laser is het nodig dat zo'n populatie-inversie gecreëerd en in stand gehouden kan worden. Meestal wordt dit gedaan met licht van flitslampen (vergelijkbaar met die in een fotoflitser), licht van een andere laser of elektrische stroom (in een halfgeleider- en gaslasers).

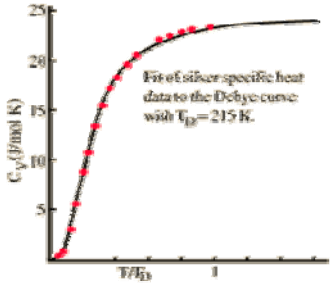


Figuur 4.21 De werking van een laser

a. Waar in de tekst blijkt dat het voor de laserwerking essentieel is dat de energieniveaus gequantiseerd zijn, dus alleen bepaalde waarden kunnen hebben?
b. Waar in de tekst blijkt dat voor laserwerking essentieel is dat ook het licht gequantiseerd is in fotonen?

In sommige lasers kun je met behulp van een magneetveld de energie van één van de energieniveaus verhogen.

c. Welk voordeel heeft dit? Geeft dit een laser die meer vermogen uitzendt of een laser waarbij je de kleur van het licht kunt veranderen?



Figuur 4. 22 Soortelijke warmte

36 Soortelijke warmtes

De soortelijke warmte van een stof is de hoeveelheid energie die nodig is om een kilogram van die stof één graad op te warmen. Hoe groot die soortelijke warmte is, hangt er van af hoeveel mogelijkheden een stof heeft om energie op te nemen. Als er weinig mogelijkheden zijn om energie op te nemen, is de soortelijke warmte klein. Klassiek is het zo dat elk deeltje per graad temperatuurstijging een bepaalde hoeveelheid energie erbij krijgt. De soortelijke warmte is dan onafhankelijk van de temperatuur.

a. Beredeneer dat een metaal met zware deeltjes een lagere soortelijke warmte heeft dan een metaal met lichte deeltjes.
b. Controleer of dit klopt voor aluminium, ijzer en goud.

Je bent gewend de soortelijke warmte als een constante te beschouwen, die je op kunt zoeken in een tabellenboek. In figuur 4.22 hiernaast zie je dat de soortelijke warmte afhankelijk is van bij welke temperatuur je kijkt, en dat de waarde bij lage temperaturen heel klein wordt.

c. Leg uit dat dit een quantumeffect is. Leg dus uit hoe dit ermee samenhangt dat niet alle energieën zijn toegestaan.



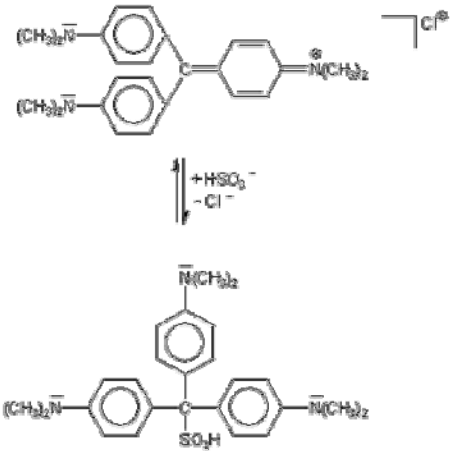
Figuur 4.23 Inkt wissen

37 Inktwisser

Met een inktwisser kun je koningsblauwe vulpeninkt onzichtbaar maken. Daarna kun je met andere inkt over je uitgewiste schrijffout heen schrijven.

Met het model van een quantumdeeltje in een doos kun je de werking van de inktwisser begrijpen. In figuur 4.24 zie je bovenaan het molecuul van de blauwe kleurstof. De details zijn niet van belang, maar je moet weten dat tenminste één elektron vrij door het hele molecuul kan bewegen. De overgang van de grondtoestand van dit elektron in deze doos naar de eerste aan-

geslagen toestand komt overeen met de energie van een foton uit het geel-groene deel van het spectrum. Deze stof absorbeert deze fotonen. De rest van het licht wordt weerkaatst, dat zie je als lichtblauw.



Figuur 4.24 De reactie van inkt met inktwisser

De inktwisser zorgt voor de reactie die je in figuur *4.24* ziet. Weer zijn details niet van belang, maar wel moet je weten dat in het nieuwe molecuul, onderaan in figuur *4.24*, de elektronen niet meer langs het centrale koolstofatoom kunnen. Je ziet dat de grootste afmeting van de voor een elektron beschikbare ruimte ongeveer twee keer zo klein is geworden. De nieuwe doos heeft een half zo grote afmeting *L*, vergeleken met de oude.

a. Bereken de grootte van het oorspronkelijke molecuul, uitgaande van het gegeven dat het molecuul geel-groen licht met golflengte 550 nm absorbeert. Gebruik het model van een deeltje in een ééndimensionale doos.

Ga er vanuit dat na de reactie de doos precies twee keer zo klein is.

b. Leg uit dat het energieverschil tussen de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand *vier* keer zo groot wordt.

In plaats van geel-groen licht *ab*sorbeert het nieuwe molecuul een ander deel van het spectrum.

c. Leg uit welk deel.

4.3

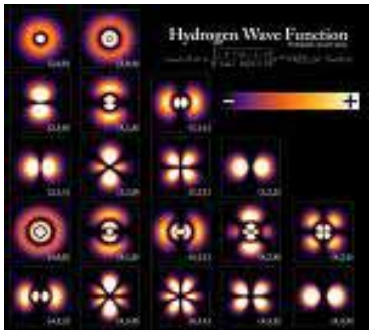
38 Helium en Lithium

a. Leg uit waarom het spectrum van het ion He^+ erg lijkt op dat van een waterstofatoom.
b. Leg uit welk spectrum meer zal lijken op het spectrum van een waterstofatoom, dat van het ion Li^+, of dat van het ion Li^{2+}.

39 Afmetingen van atomen

Maak een diagram waarin je horizontaal het atoomnummer uitzet, en verticaal de straal van het atoom. De gegevens staan in BINAS.

a. Verklaar wat je ziet als je binnen een rij van het periodiek systeem naar rechts gaat.
b. Verklaar wat je ziet als je van de ene naar de andere rij gaat.



Figuur 4. 25 Waar vind je het elektron binnen het atoom?

40 Plaatjes van atomen

Hiernaast zie je afbeeldingen van waar je de grootste kans hebt om het elektron aan te treffen binnen het waterstofatoom, voor de verschillende energieniveaus.

Leg uit welke uitspraak het beste klopt:

I Weliswaar vonden we eerder dat de de broglie-golflengte van een elektron groot is ten opzichte van de afmeting van het atoom, zodat je niet kunt spreken van een baan van een deeltje, maar je herkent nog best de cirkelbaantjes die het elektron rond de kern uitvoert, als een planeetje om een zonnetje.

II Je ziet aan de oplossingen dat het gaat om oplossingen voor het atoom als geheel: de golf is zo uitgebreid dat het elektron alle randen 'voelt', daardoor krijg je een soort staande-golfpatronen.

41 Ionisatie en foto-elektrisch effect

Onderzoek met behulp van BINAS of het gemakkelijker is een los metaalatoom te ioniseren, dus om een elektron los te maken uit een atoom, of dat het gemakkelijker is een elektron los te maken uit een macroscopisch stuk metaal. Vergelijk dus bijvoorbeeld het gasatoom natrium met het metaal natrium, het losse ijzeratoom met het metaal ijzer, enzovoorts. Is de conclusie altijd dezelfde? Kun je dit verklaren met wat je weet over lijnenspectra en over bandenspectra, die ontstaan als je veel atomen bijeenbrengt?

42 Glimmende metalen met mooie kleuren

a. Leg uit dat elektromagnetische straling niet in een metaal kan doordringen doordat het metaal een halfgevulde band heeft.
b. Leg uit dat de kleur van een metaal wordt bepaald door de manier waarop de banden ten opzichte van elkaar liggen.

43 De halfgeleiderlaser

Zoek op hoe een halfgeleiderlaser werkt. Leg uit hoe de fotonen ontstaan die het lasertje uitzendt.

44 Blu ray



Figuur 4.26 Blu-ray disc

De meeste lasertjes die je kent, bijvoorbeeld in DVD-spelers en in de scannertjes die in supermarkten de streepjescodes lezen, zijn rode halfgeleiderlasers. Voor blu-ray apparaten zijn, het woord zegt het al, blauwe halfgeleiderlasers ontwikkeld.

a. Wat is het voordeel van een blauwe laser boven een rode voor het lezen van informatie van een schijf?
b. Wat zegt dit over de afstand tussen de banden in het halfgeleidende materiaal, is die afstand relatief groot bij een blauwe halfgeleiderlaser, vergeleken met een rode halfgeleiderlaser, of relatief klein? Leg je antwoord uit.
c. Zoek op wanneer de eerste blauwe halfgeleiderlaser is gemaakt en welke nieuwe mogelijkheden dat heeft geopend voor verlichting met LED-lampen.

45 Quantumeconomie

Licht de volgende uitspraak toe: “Tientallen procenten van het Bruto Nationaal Product worden verdiend met toepassingen van quantumeffecten”

5 Kleine quanta in een grote wereld

Hoofdstukvraag	Wanneer merk je iets van quantumeffecten, wanneer niet?



Figuur 5.1 In een doos, geen quantumsprongen merkbaar

Als de quantumregels de wetten zijn waaraan de natuur voldoet, waarom merk je er in het dagelijks leven dan zo weinig van? Als jij opstaat en door de kamer gaat lopen, neemt je energie toch niet met quantumsprongetjes toe? Dat zou toch moeten bij een 'deeltje in een doos'? Het lijkt toch ook alsof je een massa aan een veer elke willekeurige energie kunt geven? Maar we hadden toch gezien dat ook een deeltje aan een veer slechts bepaalde energieën kan hebben, met sprongen daartussen?

In hoofdstuk 2 zagen we al dat het een kwestie van verhoudingen is of iets bij de quantumwereld hoort. Als de de broglie-golflengte van een voorwerp veel kleiner is dan de afmetingen van het systeem, merk je niets van het golfkarakter van het voorwerp. Dan merkt het voorwerp ook niet dat het in een beperkte ruimte is opgesloten. De de broglie-golflengte van een lopend persoon is zoveel kleiner dan de kamer, dat de persoon niet merkt dat hij een deeltje in een doos is. De massa aan de veer heeft ook zo'n kleine de broglie-golflengte, dat het zich niet gedraagt als een quantumdeeltje dat zit opgesloten in een doos met geleidelijk oplopende wanden.

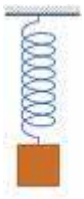


Figuur 5.2 Trap

Voor de energieën betekent dit dat de quantumsprongen onmerkbaar klein zijn. Je kunt dat vergelijken met een trap. Als een trap veertien treden heeft, dan merk je dat er afzonderlijke treden zijn. Maar als een helling drie meter omhoog gaat in een miljard stapjes van drie nanometer, dan ervaar je dat als een gladde helling, je merkt niet dat het in stapjes gaat. In dit hoofdstukje werken we dit uit voor een paar voorbeelden. Je zult zien dat **macroscopische systemen** (zeg maar systemen die met het blote oog waarneembaar zijn) altijd in een hoge aangeslagen toestand zitten, dat de quantumsprongen dan heel klein zijn vergeleken met de totale energie, en dat je hierdoor niets merkt van quantisatie van de energie.

We vergelijken steeds twee soortgelijke systemen, waarbij één van elk paar klein is en het andere groot. Een atoom trilt binnen een molecuul, een massastukje trilt aan een veer. Een molecuul absorbeert straling, de antenne van een mobiele telefoon vangt straling op. Een elektron wordt aangetrokken door een kern, de maan wordt aangetrokken door de aarde.

5.1 Macroscopisch trillen



Figuur 5.3 Harmonische oscillator

Twee ten opzichte van elkaar trillende atomen in een molecuul kunnen niet met elke energie trillen, er is een beperkt aantal mogelijke energietoestanden. De afstand tussen twee toestanden noemen we een **quantumsprong**. De grootte van die sprongen is gelijk aan $E=h\cdot f$ met f de frequentie van de trilling. We rekenen nu uit hoe groot de quantumsprongen zijn in een macroscopisch geval.

Neem als voorbeeld een massa van 100 gram aan een veer die trilt met amplitude 10 cm. De veerconstante is zo gekozen dat de trillingstijd gelijk is aan 0,50 s. De frequentie is dan gelijk aan $f = 1/T = 1/0{,}50\ s = 2{,}0$ Hz.
We berekenen eerst de totale energie. Die is gelijk aan de maximale kinetische energie. De maximale snelheid wordt gegeven door

$$v_{\max} = 2\pi\frac{A}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}10}{0{,}50} = 1{,}3 \text{ m/s},$$

De maximale kinetische energie wordt dan

$$E_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}\, m\cdot v^2 = \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot(1{,}3)^2 = 0{,}08 \text{ J}$$

De orde van grootte van de totale energie is 10^{-1} J.
De energieën van een massa aan een veer worden gegeven door (zie vorige hoofdstuk) door $E_n=(n+1/2)\cdot h\cdot f$. De quantumsprongen voor dit geval hebben dus grootte

$$\Delta E = h\cdot f = 6{,}6\cdot 10^{-34}\cdot 2{,}0 = 1{,}3\cdot 10^{-33}\text{J}$$

De quantumsprongen zijn bij dit macroscopische systeem heel klein. Vooral als je ze bekijkt in verhouding tot de totale energie, het is maar het 0,00000000000000000000000000000001ste deel. Vanuit de grondtoestand zijn dus evenzoveel quantumsprongen nodig om die toestand te bereiken: het systeem is in een heel hoge aangeslagen toestand. Als daar wat energie bijkomt, ook al is het maar een klein percentage, dan zijn dat meteen heel veel extra quanta. De stapjes zijn zo klein dat je niet merkt dat het niet continu toeneemt. Bij een molecuul, met zijn veel hogere trillingsfrequentie, zijn de quantumsprongen veel groter en is de totale energie veel kleiner, zodat je wel echt merkt dat de energie in sprongen toeneemt. Elke quantumsprong scheelt daar een slok op een borrel.

Andere criteria geven uiteraard ook als resultaat dat een massa van 100 g, die met deze frequentie en amplitude trilt, geen quantumsysteem is. De de brogliegolflengte is gelijk aan $h/(m\cdot v)$, je ziet zo dat dit vele ordes van grootte kleiner is dan de amplitude zelf.

5.2 Molecuul en antenne



Figuur 5.4 Antenne

Het absorptiespectrum van moleculen bestaat uit lijnen, slechts precieze frequenties worden geabsorbeerd. Dat komt doordat een molecuul een quantumsysteem is, de energie gaat in sprongetjes doordat de moleculen kleine 'deeltjes aan een veer' zijn.
Ook een antenne vangt specifieke frequenties op: je kunt een radio afstemmen op verschillende stations, jouw mobiele telefoon vangt alleen de signalen op die voor jou bedoeld zijn. Moet je de oorzaak ook hier zoeken in de quantumregels? Je gevoel zegt van niet, het systeem is te groot. We kijken naar de verschillen tussen de twee systemen wat de geabsorbeerde straling betreft.
Een bepaalde mobiele telefoon ontvangt en zendt straling met frequentie 900 MHz, dit is een realistische waarde. De energie van de fotonen is dan zo'n $6\cdot 10^{-26}$ J. Mobiele telefoons zenden en ontvangen vermogens van rond de 1 watt. Het gaat dus om rond de 10^{25} fotonen per seconde. Het is nergens

aan te merken dat dit in stapjes gaat, de stapjes zijn veel te klein ten opzichte van het geheel.

Het metaal van de antenne kan fotonen met elke energie absorberen. Dat komt doordat er een half gevulde band is. Dat is op zich wel een gevolg van de quantumregels, maar de quantumregels bepalen niet welke frequentie door een bepaalde antenne wordt opgevangen. Ze kunnen allemaal worden geabsorbeerd. De lengte van de antenne speelt een rol bij het bepalen welke golf goed resoneert, zo is de antenne van een mobiele telefoon veel kleiner dan die van een radio omdat de eerste golven met een kleinere golflengte moet opvangen dan de laatste. Dit heeft niets met fotonenergieën te maken.

In een molecuul zijn de frequenties hoger, die liggen in het infrarood. De energieën van de fotonen zijn dus hoger. Wat echter vooral anders is, is dat de totale energie van het molecuul veel kleiner is, zodat de fotonenergie meteen een flink deel van de totale energie uitmaakt. En dan merk je wel iets van de quantumsprongen.

5.3 EXTRA Macroscopisch draaien rond een centrum



Figuur 5.5 Foto genomen vanuit de Voyager

Een elektron dat door de kern wordt aangetrokken, kan alleen bepaalde waarden voor de energie hebben. De maan wordt op dezelfde manier aangetrokken door de aarde, als het elektron door de kern. Vergelijk maar de gravitatiewet en de wet van Coulomb:

$$F_{\text{grav}} = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \text{ en } F_{\text{el}} = k\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

De gravitatie werkt op de massa in plaats van op de lading, de constante is anders, maar de twee krachten hangen op dezelfde manier van de afstand af. Als je wilt kijken hoe groot de quantumsprongen zijn voor de maan die om de aarde cirkelt, moet je *k* vervangen door *G* en de ladingen door de massa's.

De energieën zijn in het geval van het elektron dat door de kern wordt aangetrokken gelijk aan

$$E_n = -2\pi^2 \cdot k^2 \frac{m \cdot e^4}{h^2 \cdot n^2}$$

Het is een beetje lastig dat in het elektrische geval in de formule voor de energieën niet alleen de lading van het elektron, maar ook de massa van het elektron staat. Die moet ook vervangen worden door de massa van de maan, dat is nu het 'deeltje dat wordt aangetrokken'. Eén keer wordt de lading vervangen door de massa omdat de gravitatiekracht op de massa werkt, één keer staat de massa van de maan er omdat het déze massa is die versneld moet worden. Hoe dan ook, als je de maan net zo behandelt als het elektron, worden de energieën gelijk aan

$$E = 2\pi^2 \cdot G^2 \frac{m^3{}_{\text{maan}} \cdot m^2{}_{\text{aarde}}}{h^2 \cdot n^2}$$

De energie van een overgang van niveau n naar m wordt gegeven door:

$$\Delta E = 2\pi^2 \cdot G^2 \frac{m^3{}_{\text{maan}} \cdot m^2{}_{\text{aarde}}}{h^2} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Nu lijkt het helemaal fout te gaan met de redenering dat de energiesprongen heel klein zijn in macroscopische systemen, want $2\pi^2G^2 \cdot m^3_{maan} \cdot m^2_{aarde}/h^2$ is enorm groot,wel 10^{165}. Maar als we kijken naar de uitdrukking voor de straal van de baan

$$r = \frac{n^2 \cdot h^2}{4\pi^2 \cdot G \cdot m_{\text{aarde}} \cdot m^2_{\text{maan}}}$$

dan zien we dat de maan in een enorm hoog aangeslagen toestand is. Als we de afstand van de maan tot de aarde invullen vinden we $n=10^{68}$. Als we nu kijken wat de factor $(1/n^2 - 1/m^2)$ doet voor twee opeenvolgende toestanden, dan zien we dat die factor heel klein is. Met $n=10^{68}$ en $m=n+1$ vinden we dat deze factor van de orde van grootte is van 10^{-204}. Uiteindelijk is ΔE slechts 10^{-39} J groot. Heel klein dus, zeker vergeleken met de totale energie van de maan in zijn baan. De stapjes zijn onmerkbaar klein. Dat klopt ook wel, want de maan in zijn baan is bepaald geen microscopisch systeem.

Atomen tref je aan in hun grondtoestand of in een van de eerste aangeslagen toestanden. De energie van een overgang zit in het gebied van het zichtbaar licht, de fotonen hebben energie van de orde van grootte 10^{-19} J. Dat is veel meer dan we vonden in het geval van de maan. De totale energie is veel lager, je merkt hier wél dat de energie toeneemt of afneemt in sprongetjes.

Reflectieopdrachten

- Schrijf in je eigen woorden op wanneer je iets merkt van quantumeffecten en wanneer niet. In je antwoord moeten in ieder geval de begrippen *de broglie-golflengte, nummer van de aangeslagen toestand,* en *afstand tussen de energieniveaus* voorkomen.
- Bekijk de oriëntatieopdrachten van hoofdstuk 1 en jouw antwoorden opnieuw. Welke betekenissen geef je nu aan de begrippen van vraag 1? Ben je het nog eens met je antwoorden op de vragen 2 en 3? Zijn de vragen die je bij 4 hebt geformuleerd inderdaad beantwoord?
- Maak de diagnostische toets, kijk hem na en bedenk welke onderdelen je goed beheerst en welke je nog beter moet bestuderen.
- Bedenk welke verdiepingsopdracht uit hoofdstuk 6 je wilt doen.

Begrippen

Quantumsprong
Macroscopisch systeem
Hoog aangeslagen toestand

Samenvatting

- De energie van een quantumsysteem is gequantiseerd. De energie tussen twee energietoestanden heet een **quantumsprong**.
- Een **macroscopisch systeem** is een systeem dat met het blote oog waarneembaar is.
- Bij macroscopische systemen zijn de quantumsprongen heel klein vergeleken met de totale energie en zijn de quantumsprongen onmerkbaar klein. Het systeem is een **hoge aangeslagen toestand**.

Opgaven

46 Nog meer kleine quanta

Ook lading en licht zijn gequantiseerd, net als energie. En ook in deze twee gevallen zijn de quanta heel klein. Deze twee berekeningen moeten je daar een gevoel voor geven:

Een wasmachine verbruikt een vermogen van ongeveer twee kilowatt.

a. Laat met een berekening zien dat er dan een stroomsterkte van ongeveer 9 ampère door de draden loopt.
b. Bereken hoeveel elektronen er per seconde door de draden lopen.

Een gloeilamp die 60 watt verbruikt, zendt ongeveer 3 watt aan licht uit.

c. Bereken hoeveel fotonen zichtbaar licht de gloeilamp per seconde uitzendt. Neem voor de frequentie van het licht één waarde in het midden van het zichtbare deel van het spectrum.

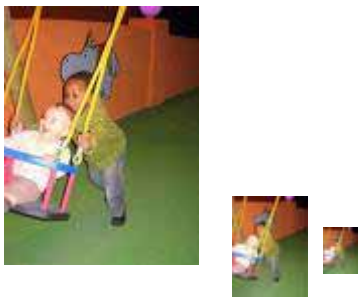
47 Maand

We zagen dat de maan in zijn baan geen quantumsysteem is, door de energiesprongen te vergelijken met die in een waterstofatoom. Natuurlijk volgt dit ook uit andere criteria.

a. Bereken de de broglie-golflengte van de maan in zijn baan.
b. Met welke afmeting moet je deze vergelijken om te bepalen of interferentieverschijnselen merkbaar zijn?

De maan is geen massa aan een veer. Toch kun je al een schatting maken van de grootte van de quantumsprongen door $\Delta E=h\cdot f$ te gebruiken, met als frequentie de frequentie van de periodieke beweging.

c. Bereken deze waarde voor de maan en vergelijk je antwoord met de waarde voor ΔE die in de tekst wordt gegeven.



Figuur 5.6 Macroscopische schommels

48 Quantumschommel

De trillingstijd van een schommel reken je uit met $T=2\pi\sqrt{(l/g)}$. De totale energie van de trilling bereken je met $E_z=m\cdot g\cdot h$, voor h neem je de maximale hoogte die de schommel bereikt.

a. Laat met een berekening zien dat de baby in de schommel een energie van ongeveer 20 J krijgt.
b. Laat met een berekening zien dat het energiequantum van deze beweging ongeveer $3\cdot10^{-34}$ J groot is.
c. In de hoeveelste aangeslagen toestand bevindt de baby zich?

Dit is dus geen quantumsysteem, de baby bevindt zich in een heel hoog aangeslagen toestand.

Baby's van quantumkabouters schommelen op quantumschommels. We gaan uitrekenen hoe groot een quantumkabouterbaby'tje is. We gaan het hele systeem verkleinen, totdat de toestand van de schommel op de foto overeenkomt met de honderdste aangeslagen toestand. Als de energie in slechts honderd stapjes toeneemt, dan merk je dat wel, dan ervaar je dat niet als continu.

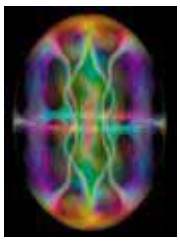
De verkleiningsfactor tussen een gewone baby en een quantumkabouterbaby noemen we x.

d. Met welke factor neemt de massa van de baby af als alle afmetingen met een factor x afnemen?
e. Met welke factor neemt de maximale hoogte van de schommel af?
f. Met welke factor neemt de totale energie af?
g. Met welke factor neemt de frequentie toe?
h. Met welke factor neemt de energie van een quantumsprong toe?
i. Met welke factor neemt het aantal quantumsprongen tussen de evenwichtsstand en de toestand van de foto af?
j. Bereken hoe groot een quantumkabouterbaby is, als je weet dat hij in honderd quantumsprongen vanuit de grondtoestand naar de toestand van de foto gaat.

49 EXTRA **Kleine sprongen tussen hoge quantumnummers**

De factor $1/(n+1)^2 - 1/n^2$, die voorkomt in de uitdrukking voor de energiesprongen van een elektron in een waterstofatoom (en voor de maan rond de aarde), is heel klein voor grote n. We onderzoeken hoe klein.

a. Bereken wat er uitkomt voor n=10, n=100, n=1000, n=10000,....
b. Maak de breuken gelijknamig. Laat zien dat er $-(2n+1)/n^2(n+1)^2$ uitkomt.
c. Voor heel grote n mag je in de teller de 1 verwaarlozen, in de noemer ook. Wat krijg je dan?
d. Hoeveel keer zo klein wordt de uitkomst als n 10 keer zo groot wordt?
e. Controleer of de in de tekst genoemde factor die hoort bij de quantumsprongen van de maan past bij de genoemde n van de aangeslagen toestand.
f. Verschillen in uitkomst als je twee dicht bij elkaar liggende waarden invult, hebben te maken met de afgeleide. Wat is de afgeleide functie van $f(x)=1/x^2$? Zie je het verband met vraag c)?



Figuur 5.7 Bose-Einstein Condensaat

50 Rydbergatoom en Bose-Einstein Condensatie

We hebben al in hoofdstuk 2 gezien dat de elektronen in een atoom een quantumsysteem vormen en de moleculen in een gas niet. Toch kan dit onder extreme omstandigheden allebei anders zijn.

We kijken eerst naar een Rydbergatoom, dat is een atoom in een enorm hoog aangeslagen toestand. De straal wordt gegeven door $r=n^2\cdot h^2/(4\cdot\pi^2\cdot k\cdot m\cdot e^2)$. De straal is groot als n heel groot is.

a. Leg uit dat zulke atomen alleen kunnen voorkomen in ultrahoog vacuüm, bijvoorbeeld in de interstellaire materie.
b. Leg met behulp van de formule $E_n=-2\pi^2\cdot k^2\cdot m\cdot e^4/(h^2n^2)$ uit dat de energieniveaus heel dicht op elkaar liggen, rond een heel hoge n.

   De de broglie-golflengte is groter voor grote n, maar de afmeting van het atoom neemt sterker toe bij grote n.
c. Leg uit dat het atoom dan wel als een mini-zonnestelseltje is te beschouwen, in tegenstelling tot een gewoon atoom.

Een gas van natriumatomen kan onder extreme omstandigheden quantumverschijnselen gaan vertonen: het vormt een zogenaamd Bose-Einstein Condensaat. Dat komt doordat de atomen interferentieverschijnselen gaan vertonen. Dat gebeurt als de de broglie-golflengte groot wordt in verhouding tot de afstand tussen de atomen.

d. Beredeneer of dit effect optreedt bij heel hoge, of juist bij heel lage temperaturen.

51 De constante van Planck

Bij eerdere criteria zagen we dat quantumverschijnselen beter zichtbaar zouden zijn als de waarde van h groter zou zijn. Dat is ook zo als je naar de energieniveaus kijkt.

Leg dit uit voor het geval van een massa die trilt aan een veer.

6 Verder denken

In deze module heb je kennis gemaakt met een aantal aspecten van de quantumwereld. Je kent een aantal toepassingen, je weet ook dat sommige processen in de microscopische wereld fundamenteel anders verlopen dan in de macroscopische wereld. Natuurlijk is over dit alles veel meer te zeggen. Veel van wat natuurkundigen en scheikundigen op dit moment onderzoeken gaat over quantumsystemen, er zijn zowel theoretische als praktische vraagstukken. In dit hoofdstuk vind je een aantal aanzetten voor verdere verdieping.



Figuur 6.1 Vreemde spiegeling

6.1 Onvoorspelbare uitkomsten?

Als je binnen in een verlichte kamer staat, en buiten is het donker, dan zie je je eigen spiegelbeeld in een ruit. Iemand die buiten staat, kan jou ook zien. Vreemd! Sommige fotonen die vanaf jou in de richting van de ruit gaan, weerkaatsen op de ruit, sommige gaan er doorheen. Dit is een kwestie van kansen, je kunt niet van tevoren aan een foton zien welke van de twee mogelijkheden dat foton zal uitvoeren. Je weet alleen het percentage van de fotonen dat het ene doet en het percentage dat het andere doet.

Het is al vreemd dat een deeltje zich ook als golf gedraagt, en een golf ook als deeltje. Het is nog vreemder dat deeltjes kunnen tunnelen: doordat niet zowel de plaats als de snelheid kunnen worden vastgelegd, gaan ze door barrières heen waar ze volgens de klassieke theorie nooit langs of over zouden komen. Dat in een atoom de energieën gequantiseerd zijn is wel duidelijk uit experimenten, maar ook heel anders dan je gewend bent bij klassieke systemen, en ook dit komt dus vreemd over. Maar wat veel natuurkundigen het meest vreemde van de quantummechanica vinden, is dat het vastleggen van de uitkomst van een meting een toevalsproces is. Je kunt heel precies berekenen wat de kansen op bepaalde uitkomsten zijn, maar je kunt niet van tevoren bepalen wat zal gebeuren. Dat wordt pas vastgelegd op het moment dat je een meting uitvoert. Dat is fundamenteel anders dan in de klassieke mechanica, waar je in principe uit de begintoestand het vervolg kunt berekenen.

Vooral Albert Einstein probeerde voorbeelden te bedenken waaruit moest blijken dat met de quantummechanica niet het laatste woord was gezegd. Misschien ligt het eigenlijk wél van tevoren vast wat gaat gebeuren, in 'verborgen variabelen'. Klinkt magisch, maar dat valt mee: als je de druk van een gas berekent, weet je ook niet de snelheid van elk molecuul, alleen het gemiddelde. De snelheden en de posities van al die moleculen zijn in principe te bepalen, maar niet in de praktijk: ze blijven 'verborgen' tijdens de berekening. Is er in quantumsystemen ook zoiets aan de hand? Zijn er verborgen variabelen in het systeem waarin al vastligt wat er zal gaan gebeuren? Of is het onmogelijk dat er verborgen variabelen bestaan?

Niels Bohr probeerde de argumenten van Albert Einstein te weerleggen. Later bedacht John Bell een methode waarmee je in een experiment zou kunnen zien of er verborgen variabelen zijn of niet. Alain Aspect deed de proef.

Opdracht: Zoek op internet of in populair-wetenschappelijke boeken op hoe deze discussie verder is verlopen. Kreeg Einstein gelijk of Bohr? Is iedereen het nu met elkaar eens?

6.2 Quantumcryptografie en quantumcomputers

Vroeger kon je een geheime boodschap versturen door een slaaf kaal te scheren, de boodschap op zijn hoofd te schrijven, een paar weken te wachten, en hem dan op pad te sturen. Tegenwoordig moeten bijvoorbeeld bij elektronisch betalen geheime boodschappen worden verstuurd, om vast te stellen of degene achter de computer wel degene is die hij zegt dat hij is. Het is van belang dat de codes die gebruikt worden niet door iemand anders kunnen worden onderschept. Het sturen van geheime boodschappen heet cryptografie.

Quantumcrypografie is een idee dat gebruik maakt van een eigenschap van quantumsytemen: het doen van een meting beïnvloedt het systeem. Als je een meting hebt gedaan, weet je dat het systeem zich op dat moment in die toestand bevindt die je hebt gemeten, als je de meting niet doet, wordt dat niet vastgelegd. Je kunt dus aan de boodschap die aankomt zien of iemand in de tussentijd stiekem de boodschap heeft gelezen. Dat kan dus wel gebeuren, maar de spion wordt zeker betrapt.

Er is nog een interessant idee voor het toepassen van quantumsystemen voor het verwerken van informatie. Dat is de 'quantumcomputer'. Deze zou veel sneller kunnen gaan rekenen dan bestaande computers, door het gebruik van q-bits in plaats van gewone bits.

Opdracht: Zoek over een van de volgende onderwerpen meer informatie:

a. "Heeft een opgeruimde kamer meer of minder entropie dan een rommelige?"
b. Hoe wordt geprobeerd het idee van quantumcryptografie in de praktijk toe te passen?
c. Waarom kan een quantumcomputer in principe veel sneller werken dan een gewone computer?
d. Bestaan er al quantumcomputers?

6.3 Pauli en verder

Binnen atomen, moleculen en vaste stoffen is het Pauli-principe belangrijk. Behalve voor elektronen is het principe ook belangrijk voor andere deeltjes, zoals neutronen en protonen. De algemene naam voor deeltjes die voldoen aan het Pauli-principe is 'fermionen'. Hier is veel meer informatie over te vinden:

- In het heelal bestaan objecten die helemaal afhankelijk zijn van dit principe: witte dwergen en neutronensterren.
- Er bestaan ook deeltjes die juist niet aan het Pauli-principe voldoen, de bosonen. Waar horen fotonen bij? Waar merk je dat aan?
- Scheikundigen die berekeningen doen aan moleculen, moeten het Pauli-principe inbouwen in hun berekeningen.

Opdracht: Zoek meer informatie over één van deze onderwerpen.

6.4 Wiskundige volgordes



Figuur 6.2 Volgorde van instructies

Het doen van een meting veroorzaakt in een quantumsysteem een verandering. De meting legt iets vast wat daarvoor nog niet vast lag. Meet je bijvoorbeeld de positie x, dan weet je dat het deeltje vanaf dat moment in een toestand zit waarvan de x nauwkeurig bekend is, maar waarvan je ook weet dat vanwege de onbepaaldheidrelatie van Heisenberg de snelheid juist onbekend is. Als je de snelheid meet, is dat andersom: snelheid bekend, positie niet. De volgorde waarin je dingen doet is hier dus van belang, de eindtoestand is verschillend als je dezelfde metingen in een andere volgorde doet.

Wiskundigen kijken hier algemener naar. Ze kijken naar 'operaties' die je kunt uitvoeren op 'objecten'. Die operaties kunnen metingen zijn, maar ook operaties met getallen of met functies. Als de volgorde waarin je bepaalde operaties doet niet uitmaakt, noem je die klasse van operaties "commutatief". Als de volgorde wel uitmaakt, zijn die operaties "niet-commutatief".

Opdracht. Hieronder staan steeds twee operaties. Ga na of de operaties commutatief zijn. Doe dus eerst de operaties in de volgorde die er staat, begin daarna opnieuw en doe de operaties in omgekeerde volgorde. Kijk of de uitkomsten verschillend zijn.

a. Ga uit van het getal 0. Tel een getal a op bij wat je hebt. Tel een getal b op bij wat je hebt.
b. Ga uit van een functie *f*. Vermenigvuldig de functie die je hebt met x (je krijgt nu een nieuwe functie). Neem de afgeleide van de functie die je nu hebt (je krijgt nu een nieuwe functie).
c. Ga uit van het getal 1. Vermenigvuldig wat je hebt met een getal a, ongelijk aan 0. Vermenigvuldig wat je hebt met een getal b, ongelijk aan 0.
d. Ga staan. Draai 30 graden naar rechts. Draai 60 graden naar rechts.
e. Ga in een beginpositie staan. Verplaats je een meter in voorwaartse richting. Draai 90 graden naar rechts.

6.5 Zonnecellen



Figuur 6.3 Zonnecellen

Fotonen worden opgenomen door moleculen of atomen. In je oog gaat het om een signaal dat informatie doorgeeft, bij fotosynthese gaat het om het opslaan van energie. In zonnecellen gebeurt dat ook.

Opdracht. Zoek uit welke materialen worden gebruikt voor zonnecellen: isolatoren, geleiders, of halfgeleiders. Zoek informatie over de werking:

a. wat is de rol van de banden?
b. Wat is de rol van fotonen?
c. Wat wordt bedoeld met 'kunstmatige bladeren'?

6.6 De Schrödingervergelijking

We hebben gekeken welke golfjes in een doos passen. De vergelijking om de precieze vorm van de golf te vinden in algemene situaties, luidt:

$$E\psi(x) = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x)$$

V geeft aan wat de krachten zijn. Voor een doosje is *V* gelijk aan nul binnen het doosje, en gelijk aan oneindig op de rand. De golf zelf wordt weergegeven door $\psi(x)$, een functie die afhankelijk is van de positie. Je moet dus een oplossing vinden waarvoor het bovenstaande klopt. Voor de doos betekent dat: een functie waarbij je een constante maal de functie zelf krijgt, als je twee keer de afgeleide neemt (De functie moet wel nul zijn op de rand, omdat de *V* daar oneindig is). *E* is de energie van de oplossing. Hoe groot ψ op een be-

paalde plaats x is, is een indicatie van de kans om het deeltje op die plaats aan te treffen.

Opdracht:

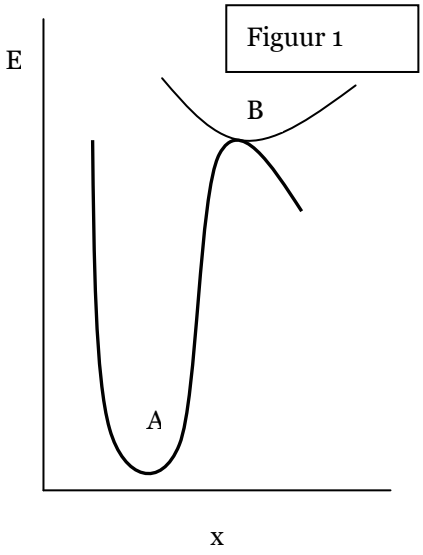
a. Ga na dat als je een bepaalde oplossing hebt die voldoet, een constante maal die oplossing ook voldoet.
b. Leg uit welke eis de constante vastlegt.
c. Probeer of een sinusfunctie voldoet, voor een deeltje in de doos.

Voorbeeldtoetsopgave

Quantumtunneling in de biochemie?

Biochemici bestuderen scheikundige reacties in het menselijk lichaam. Bij sommige enzymatische reacties draagt het ene molecuul een waterstofkern over aan het andere. De snelheid waarmee dit gebeurt is belangrijk. De standaardtheorie voor reactiesnelheden werkt met 'thermische fluctuaties'. De snelheid die in ons geval uit de standaardtheorie volgt, klopt niet met het experiment. Daarom wordt onderzocht of behalve thermische fluctuaties ook quantumtunneling een rol speelt.

a. Noem een voorbeeld van een apparaat of een proces waarbij quantumtunneling van een elektron plaatsvindt.



Figuur 1

De standaardtheorie zonder quantumtunneling luidt als volgt: De waterstofkern heeft een gemiddelde beginpositie in het oorspronkelijke molecuul. Die positie is de plaats van het minimum van de 'put' linksonder in figuur 1 (punt A). Door willekeurige bewegingen ('thermische fluctuaties') beweegt de waterstofkern een beetje rond die positie. Om verder van het midden van de put te komen, is meer energie nodig. Die energie krijgt de kern doordat alle kernen in het molecuul willekeurige bewegingen uitvoeren en hun energie op willekeurige wijze aan elkaar doorgeven. Af en toe is er een waterstofkern die genoeg energie heeft om zover van het midden terecht te komen dat het op de positie van punt B in figuur 1 terechtkomt: in een andere put, die overeenkomt met een plek in het andere molecuul.

Deze standaardtheorie geeft een andere reactiesnelheid dan de gemeten snelheid. Dit verschil is de reden om te onderzoeken of quantumtunneling ook een rol speelt.

b. Gaat de reactie in het echt sneller dan de standaardtheorie voorspelt, of langzamer? Leg je antwoord uit, geef daarbij aan of de eventuele quantumtunneling de reactie versnelt of vertraagt.

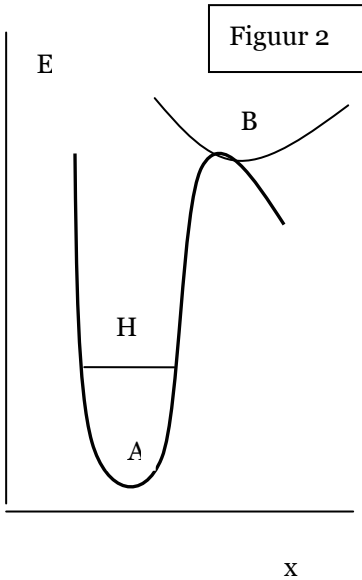
Bij quantumtunneling gedraagt de waterstofkern zich als een quantumdeeltje in een kleine ruimte. Het bijbehorende golfje spreidt zich uit tot de positie van punt B, zodat er een kans is dat het quantumdeeltje uiteindelijk in B wordt waargenomen, zonder dat het genoeg energie heeft gekregen om *over* de barrière te gaan.

Je kunt een bepaalde grootheid in je experiment variëren om te kijken of tunneling de belangrijkste rol speelt, of toch de thermische fluctuaties uit de standaardtheorie.

c. Welke grootheid kun je variëren om dit onderscheid te maken? Leg in je antwoord uit wat je zult waarnemen in de beide mogelijke gevallen ('thermische fluctuaties' en 'tunneling').

Een normale waterstofkern bestaat uit een enkel proton. Om verder te kijken naar de rol van tunneling, meet men de reactiesnelheid ook met andere isotopen van waterstof, deuterium en tritium, in plaats van gewoon waterstof. Deuterium en tritium hebben één respectievelijk twee neutronen in de kern. Je kunt waterstof, deuterium en tritium ook noteren als ^{1}H, ^{2}H en ^{3}H.

Figuur 2



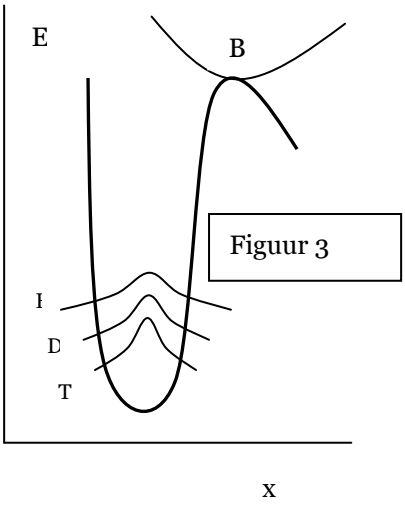
In figuur 2 zie je het laagst mogelijke energieniveau van een ^{1}H kern getekend.

d. Leg uit waarom deze laagst mogelijke energie niet overeenkomt met het minimum van de put.

In de grondtoestand is de kinetische energie van de ^{1}H kern gelijk aan $5 \cdot 10^{-20}$ J. Om te berekenen hoe groot de laagst mogelijke kinetische energie van de andere isotopen is, gaan we uit van het model van een rechte eendimensionale doos, waarin steeds een van de deeltjes is opgesloten.

e. Leg met behulp van de formule voor de de brogliegolflengte uit dat in dit model de kernen van alle isotopen in hun grondtoestand dezelfde impuls hebben.

f. Bereken de kinetische energie van een deuterium- en van een tritiumkern in de grondtoestand.



Figuur 3

In figuur 3 zijn de golfjes getekend die horen bij de drie isotopen. De put is niet helemaal recht, hij is onderin wat smaller. Daardoor zijn de golfjes niet allemaal even groot.

g. Leg uit dat in dit model zowel de bijdrage aan de reactiesnelheid van de thermische fluctuaties als die van de tunneling verschillend is per isotoop.

h. Leg uit in welk geval de reactie het langzaamst gaat.

i. Leg uit of het verschil in reactiesnelheid tussen isotopen groter is voor thermische fluctuaties of voor tunneling.